Problème : Matrice et déterminant de Gram

Dans tout le problème, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(.|.)$.

Partie 1 :

1. Soient $u, v \in E$. On note :
$$Gram(u,v) = \begin{pmatrix} (u|u) & (u|v) \\ (v|u) & (v|v) \end{pmatrix} \text{ et } G(u,v) = \det(Gram(u,v)).$$
Montrer que $G(u,v) \geq 0$. A quelle condition a-t-on $G(u,v) = 0$?
2. Soient $u, v, w \in E$. On note :
$$Gram(u,v,w) = \begin{pmatrix} (u|u) & (u|v) & (u|w) \\ (v|u) & (v|v) & (v|w) \\ (w|u) & (w|v) & (w|w) \end{pmatrix}$$
$$\text{et } G(u,v,w) = \det(Gram(u,v,w)).$$
   (a) On suppose, dans cette question, que w est orthogonal à u et v.
   Exprimer $G(u,v,w)$ en fonction de $G(u,v)$.
   (b) On suppose, dans cette question, que w est combinaison linéaire de u et v.
   Calculer $G(u,v,w)$.
   (c) On suppose, dans cette question, que $w = t + n$ avec t combinaison linéaire de u et v, et n orthogonal à u et v.
   Montrer que :
   $$G(u,v,w) = \|n\|^2 G(u,v).$$
   (d) Etablir l'équivalence :
   $$(u,v,w) \text{ libre ssi } G(u,v,w) \neq 0.$$

Partie 2 :

Soit $n \geq 2$, soient $u_1, \ldots, u_n \in E$.
On pose :
$$Gram(u_1,\ldots,u_n) = \big((u_i|u_j)\big)_{i,j\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
$$\text{et } G(u_1,\ldots,u_n) = \det(Gram(u_1,\ldots,u_n)).$$

1. Montrer que si la famille $(u_1,\ldots,u_n)$ est liée, alors $G(u_1,\ldots,u_n) = 0$.
2. On suppose, dans cette question, que la famille $(u_1,\ldots,u_n)$ est libre.
Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_n)$.
Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice de passage de la base $(e_1,\ldots,e_n)$ à la base $(u_1,\ldots,u_n)$.
   (a) Exprimer $(u_i|u_j)$ à l'aide des coefficients de la matrice A.
   (b) Montrer que $Gram(u_1,\ldots,u_n) = {}^tAA$.
   (c) En déduire que :
   $$G(u_1,\ldots,u_n) > 0.$$
3. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et soit $(e_1,\ldots,e_p)$ une base de F. Soit $x \in E$.
   (a) En écrivant $x = y + n$ avec $y \in F$ et $n \in F^\perp$, montrer que :
   $$d(x,F) = \|n\|.$$
   (b) Montrer que :
   $$d(x,F) = \sqrt{\frac{G(e_1,\ldots,e_p,x)}{G(e_1,\ldots,e_p)}}.$$

Partie 3 :

1. On pose :
$$\forall P,Q \in \mathbb{R}[X],\ \varphi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$
Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Désormais, on munit $\mathbb{R}[X]$ de ce produit scalaire et on note $(P|Q)$ au lieu de $\varphi(P,Q)$ le produit scalaire de deux éléments P et Q de $\mathbb{R}[X]$.
On pose :

$$d = \inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (t^2-(at+b))^2\,dt.$$

(a) Interpréter d à l'aide de la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de E à préciser.
(b) Calculer les déterminants :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix}.$$

(c) Donner la valeur de d.

Partie 4 :

Soient $p\in\mathbb{N}^*$, soient $a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_p\in\mathbb{R}$ tels que :

$$\forall i\in[[1,p]],\ a_i>0,\ b_i\geq 0,$$

$$\forall i,j\in[[1,p]],\ i\neq j\Rightarrow b_i\neq b_j.$$

On note $C_p(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_p)$ le déterminant de la matrice :

$$\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R}).$$

On considère la fraction rationnelle :

$$F(X)=\frac{\prod_{i=1}^{p-1}(X-a_i)}{\prod_{i=1}^{p}(X+b_i)}.$$

On admet que la décomposition en éléments simples de F est :

$$F(X)=\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i}{X+b_i}$$

avec :

$$\forall i\in[[1,p]],\ \lambda_i=\prod_{j\in[[1,p]]\setminus\{i\}}\frac{a_j+b_i}{b_i-b_j}.$$

1. On note D le déterminant d'ordre p :

$$D=\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{p-1}} & F(a_1) \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{p-1}} & F(a_2) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_p+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_p+b_{p-1}} & F(a_p) \end{vmatrix}$$

En calculant D de deux façons, montrer que :

$$F(a_p)C_{p-1}(a_1,\dots,a_{p-1},b_1,\dots,b_{p-1})=\frac{\prod_{i=1}^{p-1}(a_i+b_p)}{\prod_{i=1}^{p-1}(b_p-b_i)}C_p(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_p).$$

2. En déduire que :

$$C_p(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_p)=\frac{\prod_{1\leq i<j\leq p}(a_j-a_i)\prod_{1\leq i<j\leq p}(b_j-b_i)}{\prod_{1\leq i,j\leq p}(a_i+b_j)}.$$

3. (a) Calculer :

$$\Delta_p=\begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{p} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{p+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{p+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{p} & \frac{1}{p+1} & \frac{1}{p+2} & \cdots & \frac{1}{2p-1} \end{vmatrix}.$$

(b) En déduire la valeur de :

$$u_n=\inf_{(a_0,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n}\int_0^1\left(t^n-(a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1t+a_0)\right)^2dt.$$

On donnera une expression faisant apparaître des factorielles.
(c) Quelle est la limite de (u_n) ?