

Polynômes d'interpolation de Lagrange

Problème 1 :

1. Dans cette partie, on se fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on se donne $a_1, \dots, a_n$ des réels **deux à deux distincts**.

On définit pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$L_i = \frac{\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (X - a_j)}{\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_i - a_j)}.$$

Les polynômes $L_1, \dots, L_n$ sont appelés les **polynômes d'interpolation de Lagrange** aux points $x_1, \dots, x_n$.

Si i et $k \in \mathbb{N}$, le symbole de Kronecker est noté $\delta_{i,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$

(a) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer le degré de L_i .

(b) Montrer que :

$$\forall i, k \in \llbracket 1, n \rrbracket, L_i(a_k) = \delta_{i,k}$$

(c) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, montrer qu'il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $P = \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i$.

Déterminer la valeur de $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

(d) Dédire des questions précédentes que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $Q(a_k) = x_k$.

(e) On pose $\Phi = \prod_{k=1}^n (X - a_k)$.

i. Montrer que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \Phi'(a_i) \neq 0.$$

ii. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit Q le polynôme défini à la question 1.d.

Montrer que :

$$Q(X) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (X - a_j)}{\Phi'(a_i)}.$$

2. Si f est une fonction continue de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$, justifier l'existence de $\max_{t \in [-1, 1]} |f(t)|$.

3. Pour une fonction continue $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, on notera $\|f\|_\infty = \max_{t \in [-1, 1]} |f(t)|$.

Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on se donne $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$.

On se donne $a_1, \dots, a_n$ des éléments de $[-1, 1]$ deux à deux distincts.

On note P l'unique polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(a_i) = f(a_i)$$

(on a prouvé l'existence et l'unicité dans la partie précédente).

On note $\Phi = \prod_{i=1}^n (X - a_i)$.

(a) Soit $\varphi : x \mapsto f(x) - P(x) - \lambda \Phi(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dans cette question, on fixe $t \in [-1, 1] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$.

i. Montrer qu'il est possible de choisir λ tel que $\varphi(t) = 0$. On fixe ainsi λ dans la suite de cette question.

ii. Montrer que φ s'annule $n+1$ fois au moins sur $[-1, 1]$. En déduire que φ' s'annule au moins n fois sur $[-1, 1]$.

iii. En déduire que $\varphi^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $[-1, 1]$. On note a un réel de $[-1, 1]$ où $\varphi^{(n)}$ s'annule.

iv. En déduire que $f(t) - P(t) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \Phi(t)$.

(b) Dédire de la question précédente que pour tout $t \in [-1, 1]$, $|f(t) - P(t)| \leq \frac{M_n}{n!} |\Phi(t)|$, où $M_n = \|f^{(n)}\|_\infty$.