Problème : Formule de Stirling

On souhaite prouver la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

1. On considère les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n \text{ et } v_n = \ln(u_n).$$

   (a) Déterminer un équivalent de $v_{n+1} - v_n$.
   (b) En déduire que la suite (v_n) converge.
   (c) Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que :

$$n! \sim k\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

2. On souhaite prouver maintenant que $k = \sqrt{2\pi}$.
   On considère les intégrales de Wallis définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\, dt.$$

   (a) i. Calculer I_0 et I_1.
   ii. Montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

   iii. Soit $p \in \mathbb{N}$. En déduire les expressions de I_{2p} et I_{2p+1} en fonction de p.
   (b) i. Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1}.$$

   ii. En déduire que :

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1.$$

   iii. En déduire que :

$$\frac{1}{p}\left(\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!}\right)^2 \sim \pi.$$

3. Montrer que :

$$\frac{1}{p}\left(\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!}\right)^2 \sim \frac{k^2}{2}.$$

4. Conclure.
5. Application : montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum u_n$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n \ln \frac{2n+1}{2n-1} - 1.$$