PCSI 1 | 2025/2026

Programme de colles

Semaine 28 du 25 mai au 29 mai

Cours :

- **Chapitre 22 : Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois**
  - I Univers, événements, variables aléatoires
  - II Espaces probabilisés finis
  - III Probabilités conditionnelles
  - IV Loi d'une variable aléatoire
  - V Evénements indépendants
- **Chapitre 23 : Espérance et variance**
  - I Espérance
  - II Variance, écart type, covariance
  - III Inégalités probabilistes
- **Chapitre 24 : Déterminants**
  - I Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base
  - II Déterminant d'un endomorphisme
  - III Déterminant d'une matrice carrée
  - IV Calcul des déterminants

Questions de cours et exercices type :

Q_1 : Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev *(ch23, propositions 17 et 18)*

Q_2 : Caractérisation des bases par le déterminant *(ch24, proposition 7)*

T_1 : *Ch22, exemple 8*

n candidats passent un examen. La probabilité de réussite pour chaque candidat est p. En cas d'échec, le candidat repasse un examen de rattrapage avec la même probabilité de réussite p. Quelle est la loi du nombre de candidats ayant réussi à l'issue des deux épreuves ?

Présenter les 2 méthodes.

T_2 : *Ch23, exemple 2*

Une personne écrit à une autre pendant un an (365 jours) selon la règle suivante :

- le jour de l'an, il écrit de façon certaine,
- s'il a écrit le jour i, il écrira le jour suivant avec une probabilité $\frac{1}{2}$,
- s'il n'a pas écrit le jour i, il écrira le jour suivant de façon certaine.

Soit X_i la variable aléatoire valant 1 si une lettre a été écrite le jour i et 0 sinon.

(a) Exprimer $P(X_{i+1}=1)$ en fonction de $P(X_i=1)$.

(b) En déduire la loi de X_i pour $i \in [\![1,365]\!]$.

(c) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lettres écrites dans l'année. Déterminer l'espérance de X.

T_3 : *Ch24, exemple 8*

Soient $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{K}$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i).$$

Ce déterminant est appelé déterminant de Vandermonde.

Présenter une méthode au choix.

PCSI 1

Programme de colles

2025/2026

Semaine 28 du 25 mai au 29 mai

Cours :

- **Chapitre 22 : Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois**
  - I Univers, événements, variables aléatoires
  - II Espaces probabilisés finis
  - III Probabilités conditionnelles
  - IV Loi d'une variable aléatoire
  - V Evénements indépendants
- **Chapitre 23 : Espérance et variance**
  - I Espérance
  - II Variance, écart type, covariance
  - III Inégalités probabilistes
- **Chapitre 24 : Déterminants**
  - I Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base
  - II Déterminant d'un endomorphisme
  - III Déterminant d'une matrice carrée
  - IV Calcul des déterminants

Questions de cours et exercices type :

Q_1 : Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev *(ch23, propositions 17 et 18)*

Q_2 : Caractérisation des bases par le déterminant *(ch24, proposition 7)*

T_1 : *Ch22, exemple 8*
n candidats passent un examen. La probabilité de réussite pour chaque candidat est p. En cas d'échec, le candidat repasse un examen de rattrapage avec la même probabilité de réussite p. Quelle est la loi du nombre de candidats ayant réussi à l'issue des deux épreuves ?
Présenter les 2 méthodes.

T_2 : *Ch23, exemple 2*
Une personne écrit à une autre pendant un an (365 jours) selon la règle suivante :

- le jour de l'an, il écrit de façon certaine,
- s'il a écrit le jour i, il écrira le jour suivant avec une probabilité $\frac{1}{2}$,
- s'il n'a pas écrit le jour i, il écrira le jour suivant de façon certaine.

Soit X_i la variable aléatoire valant 1 si une lettre a été écrite le jour i et 0 sinon.

(a) Exprimer $P(X_{i+1} = 1)$ en fonction de $P(X_i = 1)$.
(b) En déduire la loi de X_i pour $i \in [\![1, 365]\!]$.
(c) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lettres écrites dans l'année. Déterminer l'espérance de X.

T_3 : *Ch24, exemple 8*
Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Ce déterminant est appelé déterminant de Vandermonde.
Présenter une méthode au choix.