PCSI 1

Programme de colles

2025/2026

Semaine 29 du 1er juin au 5 juin

Cours :

- **Chapitre 24 : Déterminants**
  - I Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base
  - II Déterminant d'un endomorphisme
  - III Déterminant d'une matrice carrée
  - IV Calcul des déterminants
- **Chapitre 25 : Espaces préhilbertiens réels**
  - I Produit scalaire
  - II Norme associée à un produit scalaire

Questions de cours et exercices type :

Q_1 : Caractérisation des bases par le déterminant *(ch24, proposition 7)*

Q_2 : Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité *(ch25, proposition 4)*

T_1 : *Ch24, exemple 8*
Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Ce déterminant est appelé déterminant de Vandermonde.
Présenter une méthode au choix.

T_2 : *Ch25, exemple 1*

(a) On pose :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^0([-1,1]), < f, g >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)\, dt.$$

Montrer que $<,>$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([-1,1])$.

(b) On pose :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], < P, Q >= \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0).$$

Montrer que $<,>$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

T_3 : *Ch25, exemple 5*
Soit $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y + 3z = 1\}$. Déterminer :

$$\min_{(x,y,z)\in A} (x^2 + y^2 + z^2).$$

PCSI 1

Programme de colles

Semaine 29 du 1er juin au 5 juin

2025/2026

<u>Cours :</u>

- **Chapitre 24 : Déterminants**
  - I Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base
  - II Déterminant d'un endomorphisme
  - III Déterminant d'une matrice carrée
  - IV Calcul des déterminants
- **Chapitre 25 : Espaces préhilbertiens réels**
  - I Produit scalaire
  - II Norme associée à un produit scalaire

<u>Questions de cours et exercices type :</u>

Q_1 : Caractérisation des bases par le déterminant *(ch24, proposition 7)*

Q_2 : Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité *(ch25, proposition 4)*

T_1 : *Ch24, exemple 8*

Soient $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{K}$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i).$$

Ce déterminant est appelé déterminant de Vandermonde.

Présenter une méthode au choix.

T_2 : *Ch25, exemple 1*

(a) On pose :

$$\forall f,g \in \mathcal{C}^0([-1,1]),\ <f,g>=\int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)\,dt.$$

Montrer que $<,>$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([-1,1])$.

(b) On pose :

$$\forall P,Q \in \mathbb{R}_n[X],\ <P,Q>=\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0).$$

Montrer que $<,>$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

T_3 : *Ch25, exemple 5*

Soit $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+2y+3z=1\}$. Déterminer :

$$\min_{(x,y,z)\in A} (x^2+y^2+z^2).$$