VII Exponentielle complexe

Définition 13

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on appelle exponentielle de z et on note e^z ou $\exp(z)$ le nombre complexe défini par :

$$e^z = e^{\mathrm{Re}\, z} e^{i\mathrm{Im}\, z}.$$

Proposition 31

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a :

- $|\exp(z)| = e^{\mathrm{Re}\, z}$ et $\mathrm{Im}\, z$ est un argument de $\exp(z)$.
- $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$.
- $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$
- $\dfrac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'}$
- $(e^z)^n = e^{nz}$.
- $\exp(z) = \exp(z') \iff z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z - z' = 2i\pi k$

Preuve.

- $|e^z| = |e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\mathrm{Im}(z)}| = |e^{\mathrm{Re}(z)}||e^{i\mathrm{Im}(z)}| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ car la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$ est strictement positive. Ainsi $e^z = |e^z| e^{i\mathrm{Im}(z)}$ donc $\mathrm{Im}(z)$ est un argument de $\exp(z)$.
- $e^{z+z'} = e^{\mathrm{Re}(z+z')} e^{i\mathrm{Im}(z+z')} = e^{\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Re}\, z'} e^{i(\mathrm{Im}\, z + \mathrm{Im}\, z')}$. Or, d'après les propriétés de l'exponentielle réelle et de l'exponentielle d'un imaginaire pur, on a : $e^{z+z'} = e^{\mathrm{Re}\, z} e^{\mathrm{Re}\, z'} e^{i\mathrm{Im}\, z} e^{i\mathrm{Im}\, z'} = e^z e^{z'}$
- $1 = e^0 = e^{z-z} = e^z e^{-z}$ d'après le résultat précédent. Ainsi, $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$.
- $\dfrac{e^z}{e^{z'}} = e^z \times \dfrac{1}{e^{z'}} = e^z e - z' = e^{z-z'}$.
- $(e^z)^n = \left(e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\mathrm{Im}(z)}\right)^n = \left(e^{\mathrm{Re}(z)}\right)^n \left(e^{i\mathrm{Im}(z)}\right)^n = e^{n\mathrm{Re}(z)} e^{in\mathrm{Im}(z)} = e^{nz}$
- $$\begin{aligned} e^z = e^{z'} &\iff \begin{cases} e^{\mathrm{Re}\, z} = e^{\mathrm{Re}\, z'} \\ \mathrm{Im}\, z \equiv \mathrm{Im}\, z' \quad [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}\, z' \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(z') = 2k\pi \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}\, z' \quad \text{car } \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \text{ est bijective} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(z') = 2k\pi \end{cases} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z - z' = 2k\pi i \end{aligned}$$

□

Méthode 10 : Equation exponentielle

Pour résoudre une équation du type $e^z = a$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, on doit déterminer la forme trigonométrique de a : $a = |a|e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ puis on écrit :

$$\begin{aligned} e^z = a &\iff e^z = |a|e^{i\theta} \\ &\iff e^z = e^{\ln|a| + i\theta} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = \ln|a| + i\theta + 2ik\pi \end{aligned}$$

➪ **Exemple 27 :** Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1. $e^z = -1$
2. $e^z = 1 + i$
3. $e^z = 2$

Correction :

1. $e^z = -1 \Leftrightarrow e^z = e^{i\pi} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ z = i\pi + 2ik\pi$
   Donc l'ensemble des solutions est :
   $$\{(2k+1)i\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

2. $e^z = 1+i \Leftrightarrow e^z = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \Leftrightarrow e^z = e^{\ln(\sqrt{2})+i\pi/4} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ z = \ln(\sqrt{2}) + i\pi/4 + 2ik\pi$
   Donc l'ensemble des solutions est :
$$\{\frac{1}{2}\ln(2) + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

3. $e^z = 2 \Leftrightarrow e^z = e^{\ln(2)} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ z = \ln(2) + 2ik\pi$
   Donc l'ensemble des solutions est :
$$\{\ln(2) + 2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

VIII Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

8.1 Définition

Dans toute la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes.

Définition 14

On définit la partie réelle de f notée $\mathrm{Re}(f)$ et la partie imaginaire de f notée $\mathrm{Im}(f)$ par :

- $\begin{array}{rccc} \mathrm{Re}(f): & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathrm{Re}(f(x)) \end{array}$
- $\begin{array}{rccc} \mathrm{Im}(f): & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathrm{Im}(f(x)) \end{array}$

Remarque : Les propriétés de la fonction $f : I \to \mathbb{C}$ se ramènent alors aux propriétés des fonctions $\mathrm{Re}(f) : I \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(f) : I \to \mathbb{R}$.

Définition 15

f est continue sur I si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

Définition 16

On dit que f est dérivable sur I si $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont dérivables sur I. On appelle alors dérivée de f et on note f' la fonction définie par : $\begin{array}{rccc} f': & I & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & (\mathrm{Re}(f))'(x) + i(\mathrm{Im}(f))'(x) \end{array}$.

Remarque : On a ainsi : $\mathrm{Re}(f') = \big(Re(f)\big)'$ et $\mathrm{Im}(f') = \big(\mathrm{Im}(f)\big)'$

Proposition 32 : Opérations sur les fonctions dérivables

Soient $f, g : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables sur I et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Alors $(\lambda f + \mu g)$, fg sont dérivables sur I. De plus, si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et on a :

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' \qquad (fg)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Remarque : Ces formules sont semblables à celle concernant les fonctions à valeurs réelles.

8.2 Exponentielle complexe

Proposition 33

Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I. Alors, la fonction $\begin{array}{rccc} \exp\circ\varphi: & I & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & e^{\varphi(x)} \end{array}$ est dérivable sur I et on a :
$$\forall x \in I,\ (\exp\circ\varphi)'(x) = \varphi'(x)e^{\varphi(x)}$$

Preuve.
On pose $\varphi_1 = \mathrm{Re}(\varphi)$ et $\varphi_2 = \mathrm{Im}(\varphi)$.

Soit $t \in I$, $(\exp\circ\varphi)(t) = e^{\varphi(t)} = e^{\varphi_1(t)+i\varphi_2(t)} = e^{\varphi_1(t)}\big(\cos(\varphi_2(t)) + i\sin(\varphi_2(t))\big)$. $\exp\circ\varphi$ est dérivable sur I par compositions, produit et somme de fonctions dérivables sur I. Soit $t \in I$, en utilisant les formules de dérivation usuelles, on obtient :

$$\begin{aligned}(\exp\circ\varphi)'(t) &= \varphi_1'(t)\exp(\varphi_1(t))\cdot(\cos(\varphi_2(t)) + i\sin(\varphi_2(t))) + \exp(\varphi_1(t))\cdot(-\varphi_2'(t)\sin(\varphi_2(t)) + \varphi_2'(t)i\cos(\varphi_2(t)))\\ &= (\varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t))\exp(\varphi_1(t))\cdot(\cos(\varphi_2(t)) + i\sin(\varphi_2(t))) = \varphi'(t)\exp(\varphi(t)).\end{aligned}$$

□

Corollaire 7

Soit $a \in \mathbb{C}$, la fonction $\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{C}\\ x & \mapsto & e^{ax}\end{array}$ est dérivable et sa dérivée est : $\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{C}\\ x & \mapsto & ae^{ax}\end{array}$.

➪ **Exemple 28 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les dérivées n-ièmes de cos et sin.

Correction : Posons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{ix}$.
f est dérivable n fois et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = i^n e^{ix} = (e^{i\pi/2})^n e^{ix} = e^{i\left(n\frac{\pi}{2}+x\right)}.$$

De plus, cos = Re(f) et sin = Im(f) ainsi $\cos^{(n)} = \text{Re}(f^{(n)})$ et $\sin^{(n)} = \text{Im}(f^{(n)})$.
Donc, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos^{(n)}(x) = \text{Re}\left(e^{i\left(n\frac{\pi}{2}+x\right)}\right) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}+x\right)$$
$$\sin^{(n)}(x) = \text{Im}\left(e^{i\left(n\frac{\pi}{2}+x\right)}\right) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}+x\right)$$

IX Interprétation géométrique des nombres complexes

9.1 Symétrie

Proposition 34

L'application $\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \to & \mathbb{C}\\ z & \mapsto & \overline{z}\end{array}$ représente
la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Preuve. Soit $M, M' \in \mathcal{P}$ d'affixes respectives $z = a+ib$, $z' = a'+ib'$ avec $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$. Notons $S : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ la symétrie par rapport à l'axe des abscisses et $\begin{array}{ccc}s : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}\\ : z & \mapsto & \overline{z}\end{array}$.
On a :

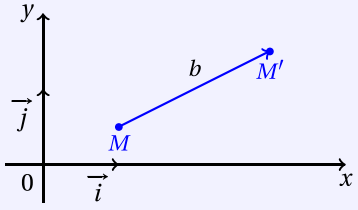
$$\begin{aligned}M' = S(M) &\iff \begin{cases} a' = a\\ b' = -b\end{cases}\\ &\iff a+ib = a'+ib'\\ &\iff z' = \overline{z}\\ &\iff z' = s(z)\end{aligned}$$

□

9.2 Translations

Proposition 35

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan d'affixe $b \in \mathbb{C}$.
L'application $\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \to & \mathbb{C}\\ z & \mapsto & z+b\end{array}$ représente
la translation de vecteur $\vec{u}$.



Preuve. Soit $M, M' \in \mathcal{P}$ d'affixes respectives z, z'. Notons $T_{\vec{u}} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ et $\begin{array}{ccc}t_b : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}\\ : z & \mapsto & z+b\end{array}$.
On a :

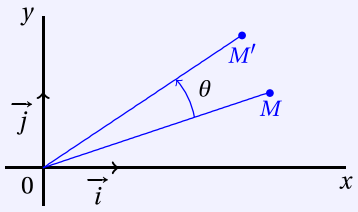
$$M' = T_{\vec{u}}(M) \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \iff z'-z = b \iff z' = z+b \iff z' = t_b(z)$$

□

9.3 Rotations et homothéties

Proposition 36

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{i\theta}z \end{array}$ représente la rotation de centre O et d'angle θ.



Preuve. Soit $M, M' \in \mathcal{P}$ d'affixes respectives z, z'. Notons $R_\theta : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ la rotation d'angle θ et $\begin{array}{ccc} r_\theta : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ : z & \mapsto & ze^{i\theta} \end{array}$.

- Cas 1 : si $z \neq 0$ i.e $M \neq O$:

$$M' = R_\theta(M) \iff \begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \text{Arg}\left(\dfrac{z'}{z}\right) \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \left|\dfrac{z'}{z}\right| = 1 \\ \text{Arg}\left(\dfrac{z'}{z}\right) \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \frac{z'}{z} = e^{i\theta} \iff z' = ze^{i\theta} \iff z' = r_\theta(z)$$

- Cas 2 : si $z = 0$ i.e $M = O$:

$$M' = R_\theta(M) \iff M' = M = O \iff z' = z = 0 \iff z' = r_\theta(z)$$

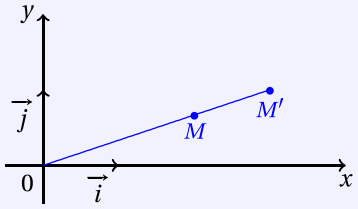
□

Définition 17

L'homothétie de centre $\Omega \in \mathcal{P}$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est l'application du plan dans lui même qui, à tout point M, associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$.

Proposition 37

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \lambda z \end{array}$ représente l'homothétie de centre O et de rapport λ .



Preuve. Soit $M, M' \in \mathcal{P}$ d'affixes respectives z, z'.
Notons $H_\lambda : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ l'homothétie de centre O et de rapport λ et $\begin{array}{ccc} h_\lambda : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ : z & \mapsto & \lambda z \end{array}$.

$$M' = H_\lambda(M) \iff \overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM} \iff z' = \lambda z \iff z' = h_\lambda z$$

□

Corollaire 8

Soit $a \in \mathbb{C}^*$.
L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & az \end{array}$ représente la composée de l'homothétie de centre O et rapport $|a|$ avec la rotation de centre O et d'angle $\text{Arg}(a)$.
Ces applications sont appelées des similitudes directes.

Remarque : Ces applications sont appelées des similitudes directes.

9.4 Alignement et orthogonalité

Proposition 38

Soit $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ deux vecteurs du plan non nuls d'affixes respectives z_1 et z_2. Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est donnée par un argument de $\dfrac{z_2}{z_1}$.
Par suite :

- $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires si et seulement si $\dfrac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$.
- $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont orthogonaux si et seulement si $\dfrac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R}$.

Preuve. On munit le plan usuel $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
Soit θ_1 (resp. θ_2) un argument de z_1 (resp. z_2).
On a $\theta_1 \equiv (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u_1})[2\pi]$ et $\theta_2 \equiv (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u_2})[2\pi]$. Or, $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u_2}) - (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u_1})$ donc $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \equiv \theta_2 - \theta_1 [2\pi]$.
Ainsi, $\theta_2 - \theta_1$ qui est un argument de $\dfrac{z_2}{z_1}$ est une aussi mesure l'angle $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$.
On a alors :

- $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires si et seulement si $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \equiv 0[\pi]$ si et seulement si $\theta_2 - \theta_1 \equiv 0[\pi]$ si et seulement si $\dfrac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$
- De même, $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont orthogonaux si et seulement si $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ si et seulement si $\theta_2 - \theta_1 \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ si et seulement si $\dfrac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R}$

□

Corollaire 9

Soient A, B et C trois points du plan, deux à deux distincts et d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est donnée par un argument de $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. Par suite :

- A, B et C sont alignés si et seulement si $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.
- ABC est rectangle en A si et seulement si $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$.

➪ **Exemple 29 :** Déterminer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixes 1, z et z^2 forment un triangle rectangle.

Correction :
Soit $z \in \mathbb{C}$. Les points $1, z, z^2$ sont deux à deux distincts si et seulement si $z \notin \{-1, 0, 1\}$.
On suppose désormais $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

- 1, z et z^2 forment un triangle rectangle en 1 si et seulement si $\dfrac{z^2-1}{z-1} \in i\mathbb{R}$.
  si et seulement si $z + 1 \in i\mathbb{R}$
  si et seulement si $\text{Re}\,(z+1) = 0$
  si et seulement si $\text{Re}\, z + 1 = 0$
  si et seulement si $\text{Re}\, z = -1$
- 1, z et z^2 forment un triangle rectangle en z si et seulement si $\dfrac{z^2-z}{1-z} \in i\mathbb{R}$.
  si et seulement si $z \in i\mathbb{R}$
  si et seulement si $\text{Re}\,(z) = 0$
- 1, z et z^2 forment un triangle rectangle en z^2 si et seulement si $\dfrac{1-z^2}{z-z^2} \in i\mathbb{R}$
  si et seulement si $\text{Re}\left(\dfrac{1+z}{z}\right) = 0$
  si et seulement si $\text{Re}\left(\dfrac{(1+z)\overline{z}}{|z|^2}\right) = 0$
  si et seulement si $\text{Re}\left(\overline{z} + |z|^2\right) = 0$
  si et seulement si $\text{Re}\,(\overline{z}) + |z|^2 = 0$
  si et seulement si $\text{Re}\, z = -|z|^2$.

  On pose $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

On a alors 1, z et z^2 forment un triangle rectangle en z^2 si et seulement si $x+x^2+y^2=0$.

si et seulement si $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$

si et seulement si $\left|z+\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$

Finalement on trouve : $\left(\mathrm{Re}\, z=-1 \text{ ou } \mathrm{Re}\, z=0 \text{ ou } \left|z+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\right)$ et $z\notin\{-1,0,1\}$.