CORRECTION DM 1

Problème 1 :

1-a). Comme exp est dérivable, g est dérivable.

• Soit $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1 = 2e^{2x} - 2e^x + e^x - 1$

$= 2e^x(e^x - 1) + e^x - 1 = (e^x - 1)(2e^x + 1)$

• Posons $h : x \mapsto 2e^x + 1$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{g'(x) = (e^x - 1)h(x)}$

b) • $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 2e^x + 1 > 0$ donc g' est du signe de $x \mapsto e^x - 1$.

•

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		↘	0	↗	

$\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty, 0] \text{ et strictement croissante sur } [0, +\infty[.}$

c) $g(0) = 0$ donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geq 0.}$

2- Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = e^{2u_n} - e^{u_n} - u_n = g(u_n) \geq 0$.

Donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante.}}$

3- Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$.

• Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = a = 0$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n = 0$.

$u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n} = 1 - 1 = 0$.

• Donc, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0}$

4-a) • Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = a < 0$ donc $u_n \leq 0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $u_n \leq 0$. Alors $2u_n \leq u_n$

donc $e^{2u_n} \leq e^{u_n}$. Ainsi $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n} \leq 0$.

• Donc, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 0}$

b) (u_n) est croissante et majorée par 0 donc $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$

c) Pour $\ell = \lim u_n$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$.

Donc, par passage à la limite : $\ell = e^{2\ell} - e^{\ell}$. Ainsi $g(\ell) = 0$.

Or g s'annule uniquement en 0. Ainsi $\ell = 0$. D'où : $\boxed{\lim u_n = 0}$

5-a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$.

Or (u_n) est croissante donc $u_n \geq u_0$. Ainsi $u_n \geq a > 0$.

De plus g est croissante sur $[0, +\infty[$, donc $g(u_n) \geq g(a)$.

Ainsi : $\boxed{u_{n+1} - u_n \geq g(a)}$.

b) • Pour $n = 0$, $u_n = a \geq a + n\,g(a)$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \geq a + n\,g(a)$.

Alors $u_{n+1} \geq u_n + g(a) \geq a + n\,g(a) + g(a) \geq a + (n+1)\,g(a)$.

• Donc, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq a + n\,g(a)}$.

c) Comme $a > 0$, $g(a) > 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (a + n\,g(a)) = +\infty$.

Ainsi, par comparaison : $\boxed{\lim u_n = +\infty}$

Problème 2 :

1- a) • Pour $n = 0$. Soit $m \in \mathbb{N}$. Supposons $m \geq n$.

On a $f(m) \in \mathbb{N}$ donc $f(m) \geq 0 = n$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $\forall m \in \mathbb{N}$, $m \geq n \Rightarrow f(m) \geq n$.

Soit $m \in \mathbb{N}$, supposons que $m \geq n+1$.

• Alors $m \geq n$ donc par hypothèse de récurrence $f(m) \geq n$.

• Supposons que $f(m) = n$.

On a $m - 1 \geq n \geq 0$ donc $m - 1 \in \mathbb{N}$, ainsi, d'après (i)

$$f(m - 1 + 1) \geq f \circ f(m - 1) + 1.$$

Donc $$f(m) \geq f \circ f(m-1) + 1$$

Or $m - 1 \geq n$ donc $f(m-1) \geq n$, ainsi $f \circ f(m-1) \geq n$.

D'où $n \geq n+1$ ce qui est absurde. Ainsi $f(m) \neq n$.

. Donc $f(m) > n$. Or $f(m), n \in \mathbb{N}$, ainsi $f(m) \geq n+1$.

• Donc, par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ m \geq n \Rightarrow f(m) \geq n.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $n \geq n$, on a : $\boxed{f(n) \geq n.}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) \geq f \circ f(n) + 1$.

Or $f \circ f(n) \geq f(n)$ donc $f(n+1) \geq f(n) + 1$.

Ainsi $\boxed{f(n+1) > f(n)}$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) \geq f \circ f(n) + 1$ donc $f(n+1) > f(f(n))$.

Or f est strictement croissante d'après c), ainsi $\boxed{n+1 > f(n).}$

e) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $n \leq f(n)$ et $f(n) < n+1$, de plus $f(n), n+1 \in \mathbb{N}$

donc $f(n) \leq n$. Ainsi $f(n) = n$.

Donc :

$$\boxed{\begin{array}{l} f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n. \end{array}}$$

2). Analyse : Supposons qu'il existe $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ vérifiant (1).

D'après 1, $\begin{array}{l} f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n. \end{array}$

• Synthèse : Posons $\begin{array}{l} f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n \end{array}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) = n+1$ et $f \circ f(n) + 1 = f(n) + 1 = n+1$

Donc $f(n+1) \geq f \circ f(n+1)$

Ainsi f vérifie (1)

• Conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{L'unique solution est} \\ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n \end{array}}$$

Problème 3:

1- • Analyse: Supposons qu'il existe $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ involution strictement croissante.

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

• si $f(n) < n$, alors, comme f strictement croissante : $f \circ f(n) < f(n)$ donc $n < f(n)$ ce qui est absurde.

• si $f(n) > n$, alors $f \circ f(n) > f(n)$ donc $n > f(n)$ ce qui est absurde.

• Ainsi $f(n) = n$.

Donc $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n$

• Synthèse: Posons $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n$.

Alors f est strictement croissante et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f \circ f(n) = f(n) = n$.

Donc f est une involution.

• Conclusion:

> L'unique involution strictement croissante est :
> $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n$.

2-a) Supposons que f soit une involution de $\mathbb{Z}$ et que f soit paire.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n = f \circ f(n) = f \circ f(-n) = -n$ donc $n = 0$ ce qui est absurde.

Ainsi

> une involution de $\mathbb{Z}$ n'est pas paire.

b) Supposons que f soit une involution de $\mathbb{Z}$ et que f soit T-périodique, $T \in \mathbb{R}^*$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$, $n = f \circ f(n) = f \circ f(n+T) = n + T$ donc $T = 0$ ce qui est absurde.

Ainsi

> une involution de $\mathbb{Z}$ n'est pas périodique.

3- Soit $N \in \mathbb{Z}$.

• Analyse: Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f(n) = N$

Alors $f \circ f(n) = f(N)$ donc $n = f(N)$.

• Synthèse: Posons $n = f(N)$. Alors $n \in \mathbb{N}$ et $f(n) = f \circ f(N) = N$.

• Conclusion:

> $\exists ! \, n \in \mathbb{Z}, \ f(n) = N$

4-a) Soit $n \in \mathbb{Z}$, supposons $f(n+1) \neq f(n) - 1$.

. Comme f est strictement décroissante, $f(n+1) < f(n)$, or $f(n+1), f(n) \in \mathbb{Z}$

donc $f(n+1) \leq f(n) - 1$. Ainsi $f(n+1) < f(n) - 1$.

Ainsi $f(n+1) < f(n+1) + 1 < f(n)$.

. De plus, d'après 3, il existe un unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$f(n+1) + 1 = f(k).$$

Ainsi $f(n+1) < f(k) < f(n)$

. Or f est strictement décroissante donc $n+1 > k > n$.

Donc k est un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs, ce qui est absurde.

. Donc : $\boxed{f(n+1) = f(n) - 1}$

b) . Pour $n = 0$, $f(n) = f(0) = f(0) - n$

$f(-n) = f(0) = f(0) - (-n)$

. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $f(n) = f(0) - n$ et $f(-n) = f(0) - (-n)$

. $f(n+1) = f(n) - 1 = f(0) - n - 1 = f(0) - (n+1)$

. $f(-n) = f(-n-1+1) = f(-n-1) - 1$

donc $f(-(n+1)) = f(-n) + 1 = f(0) + n + 1 = f(0) - (-(n+1))$

. Donc, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = f(0) - n$ et $f(-n) = f(0) - (-n)$.

D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(n) = f(0) - n.}$

5-a) . Analyse : Supposons qu'il existe f involution de $\mathbb{Z}$ strictement décroissante.

Alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = f(0) - n$. Posons $a = f(0)$

Donc $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto a - n$.

. Synthèse : Posons $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto a - n$, $a \in \mathbb{Z}$.

Alors f est strictement décroissante et, soit $n \in \mathbb{Z}$,

$f \circ f(n) = f(a - n) = a - (a - n) = n$ donc f est une involution.

• Conclusion : Les involutions de $\mathbb{Z}$ strictement décroissantes sont :

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto a-n\end{array}, \quad a \in \mathbb{Z}.}$$

b) D'après 1 et 5-a, les involutions de $\mathbb{Z}$ strictement monotones sont

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n\end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto a-n\end{array}, \quad a \in \mathbb{Z}.}$$

c) • Posons $f : \begin{array}{l}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n\end{array}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$, $f(-n) = -n = -f(n)$ donc f est impaire.

• Soit $a \in \mathbb{Z}$, posons $f : \begin{array}{l}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto a-n\end{array}$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$, $f(-n) = a+n$ et $-f(n) = -a+n$

donc $f(-n) = -f(n) \iff a = 0$.

• Ainsi les involutions de $\mathbb{Z}$ strictement monotones et impaires sont :

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n\end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto -n\end{array}.}$$

6-a) Soit $n \in \mathbb{Z}$,

• si n pair, alors $n+1$ est impair donc :

$$f \circ f(n) = f(n+1) = n+1-1 = n$$

• si n impair, alors $n-1$ est pair donc :

$$f \circ f(n) = f(n-1) = n-1+1 = n$$

Donc $\boxed{f \text{ est une involution de } \mathbb{Z}.}$

b) • $f(1) = 0$ et $f(2) = 3$ donc $f(1) < f(2)$ ainsi f n'est pas strictement décroissante.

• $f(1) = 0$ et $f(0) = 1$ donc $f(1) < f(0)$ ainsi f n'est pas strictement croissante.

• Donc $\boxed{f \text{ n'est pas strictement monotone.}}$