CORRECTION DM 2

Exercice 1:

- **Analyse:** Supposons qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $4m = a^2 - b^2$.

Alors $4m = (a+b)(a-b)$. Or m est premier et $a-b \leq a+b$, donc:

$$\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=4m \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a-b=2 \\ a+b=2m \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a-b=4 \\ a+b=m \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a-b=m \\ a+b=4 \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} a=\frac{4m+1}{2} \notin \mathbb{N} \\ a+b=4m \end{cases}$ ou $\begin{cases} a=\frac{2m+2}{2} \\ a+b=2m \end{cases}$ ou $\begin{cases} a=\frac{m+4}{2} \notin \mathbb{N} \text{ si } m \neq 2 \\ a+b=m \end{cases}$ ou $\begin{cases} a=\frac{m+4}{2} \notin \mathbb{N} \text{ si } m \neq 2 \\ a+b=4 \end{cases}$

Ainsi si $m \neq 2$, $\begin{cases} a=m+1 \\ b=m-1 \end{cases}$ et si $m=2$ $\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a=3 \\ b=-1 \notin \mathbb{N} \end{cases}$ ou $\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}$

Dans tous les cas: $\begin{cases} a=m+1 \\ b=m-1 \end{cases}$

- **Synthèse:** Posons $a=m+1$ et $b=m-1$. Alors $a, b \in \mathbb{N}$ et

$$a^2-b^2 = (m+1)^2-(m-1)^2 = (m+1+m-1)(m+1-m+1) = 4m.$$

- **Conclusion:**

$$\boxed{\exists!\ (a,b) \in \mathbb{N}^2,\ 4m = a^2-b^2.}$$

Problème 1:

1-a) Posons $f :]0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \sin x$ et $g :]0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \tan x$.

- f et g sont dérivables et, si $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$f'(x) = 1 - \cos x > 0$ et $g'(x) = 1 - (1+\tan^2 x) = -\tan^2 x < 0$

Donc f est strictement croissante et g est strictement décroissante.

- Comme $\lim_0 f = 0$, $f > 0$ et comme $\lim_0 g = 0$, $g < 0$.

Ainsi:

$$\boxed{\forall x \in]0, \tfrac{\pi}{2}[,\ \sin x < x < \tan x.}$$

b) Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$2\cos(2x) + 2\tan^2 x - 2 = 2(1-2\sin^2 x) + 2\tan^2 x - 2$$

$$= -4\sin^2 x + 2\tan^2 x$$

$$2\cos(2x) + 2\tan^2 x - 2 = -\frac{1}{2}\left(8\sin^2 x - 4\tan^2 x\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 x}\left(8\sin^2 x\cos^2 x - 4\sin^2 x\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 x}\cdot 4\sin^2 x\left(2\cos^2 x - 1\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 x}\cdot 4\tan x \sin x\cdot\cos x\cdot\cos(2x)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\tan x\cdot 2\sin(2x)\cdot\cos(2x)$$

Donc $\boxed{2\cos(2x) + 2\tan^2 x - 2 = -\frac{1}{2}\left(1+\tan^2 x\right)\tan x\cdot\sin(4x).}$

c) Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{\tan x}{x} = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}$. Or $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{x} = 1.}$

2-a) . sin et tan sont deux fois dérivables sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc f est deux fois dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

. Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$f'(x) = 2\sin x\cos x + \tan x + x\left(1+\tan^2 x\right) - 4x$$

$$= \sin(2x) + \tan x - 3x + x\tan^2 x$$

$$f''(x) = 2\cos(2x) + 1 + \tan^2 x - 3 + \tan^2 x + x\cdot 2\left(1+\tan^2 x\right)\tan x$$

$$= 2\cos(2x) + 2\tan^2 x - 2 + 2x\left(1+\tan^2 x\right)\tan x$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1+\tan^2 x\right)\tan(x)\cdot\sin(4x) + 2x\left(1+\tan^2 x\right)\tan x$$

d'après 1. b

$$= \frac{1}{2}\left(1+\tan^2 x\right)\tan x\left(-\sin(4x) + 4x\right)$$

Donc $\boxed{f''(x) = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2 x\right)\tan x\left(4x - \sin 4x\right).}$

b) . Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $1+\tan^2 x > 0$, $\tan x > 0$

et d'après 1-a $\sin 4x < 4x$ donc $f''(x) > 0$

Ainsi f' est strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

• On $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$ donc $f' > 0$.

Ainsi f strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

• On $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ donc $\boxed{f > 0}$.

c) Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a donc : $\sin^2 x + x \tan x - 2x^2 > 0$.

D'où $\frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{\tan x}{x} > 2$.

Ainsi : $\boxed{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} > 2}$.

d) Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} \geq m$

On a : $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} = 1 + 1 = 2$. Donc, par passage à la limite : $2 \geq m$.

Ainsi, $\boxed{2 \text{ est le meilleur minorant.}}$

3 - a) • $\sin$ et $\tan$ sont dérivables et ne s'annulent pas sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ donc g est dérivable.

• Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$g'(x) = 2 \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} \cdot \frac{x}{\sin x} + \frac{\tan x - x(1 + \tan^2 x)}{\tan^2 x}.$$

$$= 2 \frac{x}{\sin^2 x} - 2x^2 \frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{1}{\tan x} - \frac{x}{\tan^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$= 2 \frac{x}{\sin^2 x} - 2x^2 \frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{1}{\tan x} - \frac{x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{x}{\sin^2 x} - 2x^2 \frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{1}{\tan x}$$

$$= x^2 \frac{\cos x}{\sin^3 x} \left(\frac{1}{x} \frac{\sin x}{\cos x} - 2 + \frac{1}{x^2} \sin^2 x \right)$$

$$= x^2 \frac{\cos x}{\sin^3 x} \left(\frac{\tan x}{x} - 2 + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \right)$$

Donc $\boxed{h : x \mapsto x^2 \frac{\cos x}{\sin^3 x} = \frac{x^2}{\sin^2 x \tan x} \text{ convient}}$

b) Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, d'après 2-c, $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} > 2$ donc $g'(x)$ est du signe de $h(x)$. Or $\cos x > 0$ et $\sin^3 x > 0$ donc $g'(x) > 0$.

Ainsi g est strictement croissante.

Or $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 1 + 1 - 2 = 0$. Donc $g > 0$.

Ainsi : $\boxed{\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \quad \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 + \frac{x}{\tan x} > 2}$

Problème 2 :

1- • $\arccos$ et $\arcsin$ sont dérivables sur $]-1, 1[$ donc $x \mapsto \arcsin(ax)$ est dérivable sur $]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}[$ et $x \mapsto \arccos(bx)$ est dérivable sur $]-\frac{1}{b}, \frac{1}{b}[$.

Or $0 < b < a$ donc $]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}[\subset]-\frac{1}{b}, \frac{1}{b}[$.

Ainsi $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}[.}$

• Soit $x \in]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}[$,

$$\boxed{f'(x) = \frac{a}{\sqrt{1-(ax)^2}} + \frac{b}{\sqrt{1-(bx)^2}}}$$

• Comme $a, b > 0$, alors $f'(x) > 0$.

Donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante.}}$

2- f est continue et strictement croissante sur $[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}]$ donc f est bijective de $I = [-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}]$ vers $J = [f(-\frac{1}{a}), f(\frac{1}{a})]$

Or : $J = [\arcsin(-1) + \arccos(-\frac{1}{a}), \arcsin(1) + \arccos(\frac{1}{a})]$

Donc $\boxed{f \text{ est bijective de } I = [-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}] \text{ vers } J = [-\frac{\pi}{2} + \arccos(-\frac{1}{a}), \frac{\pi}{2} + \arccos(\frac{1}{a})].}$

3- • $\cos(f(x)) = \cos(\arcsin(ax) + \arccos(bx))$

$= \cos(\arcsin(ax))\cos(\arccos(bx)) - \sin(\arcsin(ax))\sin(\arccos(bx))$

$= \sqrt{1-(ax)^2}\cdot bx - ax\sqrt{1-(bx)^2}$

$$\boxed{\cos(f(x)) = x\left(b\sqrt{1-a^2x^2} - a\sqrt{1-b^2x^2}\right)}$$

• On a : $0 < b < a$

Donc $1-a^2x^2 \leq 1-b^2x^2$ ainsi $0 \leq \sqrt{1-a^2x^2} \leq \sqrt{1-b^2x^2}$

Donc $b\sqrt{1-a^2x^2} \leq a\sqrt{1-b^2x^2}$

Ainsi $b\sqrt{1-a^2x^2} - a\sqrt{1-b^2x^2} \leq 0$

Donc $\boxed{\cos(f(x)) \text{ est du signe de } -x}$

4- • $\sin(f(x)) = \sin(\arcsin(ax) + \arccos(bx))$

$= \sin(\arcsin(ax))\cos(\arccos(bx)) + \cos(\arcsin(ax))\sin(\arccos(bx))$

$= ax\cdot bx + \sqrt{1-(ax)^2}\sqrt{1-(bx)^2}$

Donc $\boxed{\sin f(x) = abx^2 + \sqrt{1-a^2x^2}\sqrt{1-b^2x^2}}$

• $\cos^2(f(x)) = x^2\left(b\sqrt{1-a^2x^2} - a\sqrt{1-b^2x^2}\right)^2$

$= x^2\left(b^2(1-a^2x^2) - 2ab\sqrt{1-a^2x^2}\sqrt{1-b^2x^2} + a^2(1-b^2x^2)\right)$

$= x^2\left(b^2 - a^2b^2x^2 - 2ab\left(\sin(f(x)) - abx^2\right) + a^2 - a^2b^2x^2\right)$

Donc $\boxed{\cos^2(f(x)) = x^2(a^2+b^2-2ab\sin f(x))}$

5- Posons $x = f^{-1}(y)$. On a $f(x) = y$ donc :

$$\cos^2(y) = x^2(a^2+b^2-2ab\sin y)$$

Or $a^2+b^2-2ab\sin y \geq a^2+b^2-2ab = (a-b)^2 > 0$

Ainsi $x^2 = \dfrac{\cos^2 y}{a^2+b^2-2ab\sin y}$

Donc $x = \pm \dfrac{\cos y}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin y}}$

On sait que $f(x)$ est du signe de $-x$ donc x est du signe de $-\cos y$.

Ainsi $x = -\dfrac{\cos y}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin y}}$.

D'où : $\boxed{f^{-1}(y) = -\dfrac{\cos y}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin y}}}$

6- Pour $a = \frac{4}{5}$ et $b = \frac{2}{5}$. On a : $0 < b < a$ et, si $x \in [-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}]$,

On a : $J = [-\frac{\pi}{2} + \arccos(-\frac{1}{2}), \frac{\pi}{2} + \arccos(\frac{1}{2})]$

$= [-\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}] = [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$

Ainsi $\frac{\pi}{6} \in J$, d'où :

$\arcsin\frac{4x}{5} + \arccos\frac{2x}{5} = \frac{\pi}{6} \iff f(x) = \frac{\pi}{6} \iff x = f^{-1}(\frac{\pi}{6})$

$\iff x = -\dfrac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin\frac{\pi}{6}}}$

$\iff x = -\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{4}{25}-\frac{16}{25}\times\frac{1}{2}}}$

$\iff x = -\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{12}{25}}}$

$\iff x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{5}{2\sqrt{3}}$

$\iff x = -\frac{5}{4}$.

Donc l'unique solution est : $\boxed{x = -\frac{5}{4}}$