CORRECTION DM 3

Problème 1 :

1- • $a_0 = \binom{0}{0} = 1$ $\quad a_1 = \frac{1}{2}\binom{2}{1} = \frac{1}{2}\times 2 = 1$ $\quad a_2 = \frac{1}{3}\binom{4}{2} = \frac{1}{3}\frac{4\times 3}{2} = 2$

$a_3 = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = \frac{1}{4}\frac{6!}{3!3!} = \frac{1}{4}\frac{6\times 5\times 4}{6} = 5$

$a_4 = \frac{1}{5}\binom{8}{4} = \frac{1}{5}\frac{8!}{4!4!} = \frac{1}{8}\frac{8\times 7\times 6\times 5}{4\times 3\times 2} = 14$

Donc : $\boxed{a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 5,\ a_4 = 14}$

• $S_0 = a_0 a_0 = 1$ $\quad S_1 = a_0 a_1 + a_1 a_0 = 2$

$S_2 = a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0 = 5$ $\quad S_3 = a_0 a_3 + a_1 a_2 + a_2 a_1 + a_3 a_0 = 14$

Donc $\boxed{S_0 = 1,\ S_1 = 2,\ S_2 = 5,\ S_3 = 14.}$

• On remarque que : $\boxed{\forall n \in [\![0,3]\!],\ S_n = a_{n+1}}$.

2) • Soit $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} k\, a_k\, a_{n-k} \underset{j=n-k}{=} \sum_{j=0}^{n} (n-j)\, a_{n-j}\, a_j$

Ainsi, comme les indices sont muets :

$$\boxed{T_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k\, a_{n-k}}.$$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, $2T_n = T_n + T_n = \sum_{k=0}^{n} k\, a_k\, a_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k\, a_{n-k}$

$$= \sum_{k=0}^{n} n\, a_k\, a_{n-k} = n \sum_{k=0}^{n} a_k\, a_{n-k}$$

Donc $\boxed{2T_n = n S_n}$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$(n+2)\, a_{n+1} = \frac{n+2}{n+2}\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!\,(2n+1)(2n+2)}{n!\,n!\,(n+1)(n+1)}$

$= \binom{2n}{n}\frac{2n+1}{n+1} \times 2 = 2(2n+1)\cdot\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Donc : $\boxed{(n+2)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n}$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$,

- $T_{n+1} + S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} k a_k a_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} a_k a_{n+1-k}$

$= \sum_{k=0}^{n+1} (k+1) a_k a_{n+1-k}$

$= a_0 a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (k+1) a_k a_{n+1-k}$

$\underset{j=k-1}{=} a_{n+1} + \sum_{j=0}^{n} (j+2) a_{j+1} a_{n-j}$

$= a_{n+1} + \sum_{j=0}^{n} 2(2j+1) a_j a_{n-j}$ d'après 3.

$= a_{n+1} + 4 \sum_{j=0}^{n} j a_j a_{n-j} + 2 \sum_{j=0}^{n} a_j a_{n-j}$

$= a_{n+1} + 4T_n + 2S_n$

$= a_{n+1} + 2nS_n + 2S_n$ d'après 2.

Donc $\boxed{T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n.}$

- D'après 2, $T_{n+1} = \frac{n+1}{2} S_{n+1}$. Donc :

$$\boxed{\frac{n+3}{2} S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n}$$

5) • Pour $n = 0$, $S_0 = 1 = a_1$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $S_n = a_{n+1}$.

Alors $\frac{n+3}{2} S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} = (2n+3)a_{n+1}$

Or, d'après 3, $(n+3)a_{n+2} = 2(2n+3)a_{n+1}$

Donc : $\frac{n+3}{2} S_{n+1} = \frac{n+3}{2} a_{n+2}$.

Ainsi $S_{n+1} = a_{n+2}$

• Donc, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = a_{n+1}.}$

6) • Pour $n = 0$, $a_n = a_0 = 1 \in \mathbb{N}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k \in \mathbb{N}$.

On a : $a_{n+1} = S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k \in [\![0, n]\!]$ et comme $n - k \in [\![0, n]\!]$, $a_{n-k} \in [\![0, n]\!]$.

Donc a_{n+1} est une somme de produits d'entiers naturels.

Ainsi $a_{n+1} \in \mathbb{N}$.

• Donc, par récurrence faite : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in \mathbb{N}}$

Problème 2 :

1-a) $f(i) = \dfrac{\mathrm{Im}(i^5)}{(\mathrm{Im}(i))^5} = \dfrac{\mathrm{Im}(i)}{1^5} = 1$ donc $\boxed{f(i) = 1}$

b) • $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ donc $\boxed{1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}$.

• $f(1+i) = \dfrac{\mathrm{Im}((1+i)^5)}{(\mathrm{Im}(1+i))^5} = \dfrac{\mathrm{Im}\left((\sqrt{2})^5 e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)}{1^5} = (\sqrt{2})^5 \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)$

$= 4\sqrt{2} \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Donc $\boxed{f(1+i) = -4}$

c) • $\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$ donc $\boxed{\sqrt{3} - i = 2\, e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

• $f(\sqrt{3} - i) = \dfrac{\mathrm{Im}((\sqrt{3} - i)^5)}{(\mathrm{Im}(\sqrt{3} - i))^5} = \dfrac{\mathrm{Im}\left(2^5 e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)}{(-1)^5} = -2^5 \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

$= -2^5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

Donc $\boxed{f(\sqrt{3} - i) = 16}$

2-a) i) D'après la formule du binôme de Newton :

$$z^5 = (x + iy)^5 = x^5 + 5x^4 \cdot iy + 10x^3 (iy)^2 + 10x^2 (iy)^3 + 5x(iy)^4 + (iy)^5$$
$$= x^5 + i5x^4 y - 10x^3 y^2 - i10x^2 y^3 + 5xy^4 + iy^5$$

Donc : $\boxed{\mathrm{Im}(z^5) = 5x^4 y - 10x^2 y^3 + y^5}$

ii) $f(z) = \dfrac{5x^4y - 10x^2y^3 + y^5}{y^5} = \dfrac{5x^4}{y^4} - 10\dfrac{x^2}{y^2} + 1$

Donc $\boxed{f(z) = 5X^4 - 10X^2 + 1}$

b- Soit $g : X \mapsto 5X^4 - 10X^2 + 1$.

g est dérivable et : $\forall X \in \mathbb{R}$, $g'(X) = 20X^3 - 20X = 20X(X^2 - 1)$

X	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(X)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	-4	↗		↘	-4	↗	$+\infty$

Ainsi $\forall X \in \mathbb{R}$, $g(X) \geq -4$

Donc : $\boxed{\forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R},\ f(z) \geq -4}$

c) Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$,

$f(z) = -4 \iff g(X) = -4 \iff X = -1$ ou $X = 1$ d'après la question précédente.

$\iff \dfrac{x}{y} = -1$ ou $\dfrac{x}{y} = 1$

$\iff x = -y$ ou $x = y$.

Ainsi l'ensemble des solutions de $f(z) = -4$ est :

$\boxed{\{y(-1+i),\ y \in \mathbb{R}^*\} \cup \{y(1+i),\ y \in \mathbb{R}^*\}}$

3-a) $re^{i\theta} \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(re^{i\theta}) = 0 \iff r\sin\theta = 0$

$\iff \sin\theta = 0 \iff \theta \equiv 0\ [\pi]$

Ainsi, on a $\boxed{re^{i\theta} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \text{ si } \theta \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}}$.

b) $\sin(5\theta) = \mathrm{Im}(e^{i5\theta}) = \mathrm{Im}((e^{i\theta})^5) = \mathrm{Im}((\cos\theta + i\sin\theta)^5)$

$= \mathrm{Im}(\cos^5\theta + 5\cos^4\theta \cdot i\sin\theta + 10\cos^3\theta(i\sin\theta)^2$

$+ 10\cos^2\theta(i\sin\theta)^3 + 5\cos\theta(i\sin\theta)^4 + (i\sin\theta)^5)$

$= 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta$

$= 5(1-\sin^2\theta)^2\sin\theta - 10(1-\sin^2\theta)\sin^3\theta + \sin^5\theta$

$\sin(5\theta) = 5(1-2\sin^2\theta+\sin^4\theta)\sin\theta - 10\sin^3\theta + 11\sin^5\theta$

Donc $\boxed{\sin(5\theta) = 5\sin\theta - 20\sin^3\theta + 16\sin^5\theta}$

c) $f(re^{i\theta}) = \dfrac{\mathrm{Im}(r^5 e^{i5\theta})}{(\mathrm{Im}(re^{i\theta}))^5} = \dfrac{r^5\sin(5\theta)}{(r\sin\theta)^5}$

$= \dfrac{5\sin\theta - 20\sin^3\theta + 16\sin^5\theta}{\sin^5\theta} = \dfrac{5}{\sin^4\theta} - \dfrac{20}{\sin^2\theta} + 16$

Donc $\boxed{f(re^{i\theta}) = 5X^2 - 20X + 16}$

d) Pour $h : X \mapsto 5X^2 - 20X + 16$.

h est dérivable et : $\forall X \in \mathbb{R}$, $h'(X) = 10X - 20 = 10(X-2)$

X	$-\infty$		2		$+\infty$
$h'(X)$		$-$	0	$+$	
h		↘	-4	↗	

Donc : $\forall X \in \mathbb{R}$, $h(X) = 5X^2 - 20X + 16 \geq -4$.

Ainsi : $\boxed{\forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R},\ f(z) \geq -4}$.

e) Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Soit $r \in \mathbb{R}^{+*}$, $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = re^{i\theta}$.

$f(z) = -4 \iff f(re^{i\theta}) = -4 \iff h(X) = -4 \iff X = 2$ d'après 3.d

$\iff \dfrac{1}{\sin^2\theta} = 2 \iff \sin\theta = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\iff \theta \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [\dfrac{\pi}{2}]$

$\iff e^{i\theta} \in \left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

$\iff z = r\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ ou $z = r\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ ou $z = -r\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

ou $z = -r\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

Donc l'ensemble des solutions de $f(z) = -4$ est :

$\left\{r\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ r\in\mathbb{R}^{+*}\right\} \cup \left\{r\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ r\in\mathbb{R}^{+*}\right\} \cup \left\{r\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i),\ r\in\mathbb{R}^{+*}\right\} \cup \left\{-r\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i),\ r\in\mathbb{R}^{+*}\right\}$

C'est-à-dire : $\boxed{\{r(1+i),\ r\in\mathbb{R}^*\} \cup \{r(1-i),\ r\in\mathbb{R}^*\}}$