CORRECTION DM 4

Problème 1 :

1) . Le discriminant associé à $1 - 2\alpha\cos t + \alpha^2 = 0$ est $\Delta = 4\cos^2 t - 4 = -4\sin^2 t \leq 0$

Donc : $\forall t \in \mathbb{R}$, $1 - 2\alpha\cos t + \alpha^2 \geq 0$.

. De plus $1 - 2\alpha\cos t + \alpha^2 = 0 \iff \begin{cases} \Delta = 0 \\ \alpha = \frac{2\cos t}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \sin t = 0 \\ \alpha = \cos t \end{cases} \iff \begin{cases} t \equiv 0 \ [\pi] \\ \alpha = \pm 1 \end{cases}$

Or $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ donc $1 - 2\alpha\cos t + \alpha^2 \neq 0$.

. Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}$, $1 - 2\alpha\cos t + \alpha^2 > 0$.

Donc $\boxed{f_\alpha \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

. cos est continue sur $\mathbb{R}$ et ln est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc :

$\boxed{f_\alpha \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

2-a) $J_{\frac{1}{\alpha}} = \int_0^\pi \ln\left(1 - \frac{2}{\alpha}\cos t + \frac{1}{\alpha^2}\right) dt = \int_0^\pi \ln\left(\frac{\alpha^2 - 2\alpha\cos t + 1}{\alpha^2}\right) dt$

$= \int_0^\pi \left(\ln(\alpha^2 - 2\alpha\cos t + 1) - \ln(\alpha^2)\right) dt$

$= \int_0^\pi \ln(\alpha^2 - 2\alpha\cos t + 1)\, dt - 2\ln|\alpha| \int_0^\pi 1\, dt$

Donc $\boxed{J_{\frac{1}{\alpha}} = J_\alpha - 2\pi\ln|\alpha|.}$

b) On effectue le changement de variable $t = \pi - x$. On a : $dt = -dx$.

$J_\alpha = \int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha\cos t + \alpha^2)\, dt = -\int_\pi^0 \ln(1 - 2\alpha\cos(\pi - x) + \alpha^2)\, dx$

$= \int_0^\pi \ln(1 + 2\alpha\cos x + \alpha^2)\, dx$.

Donc $\boxed{J_\alpha = J_{-\alpha}}$

c) On effectue l'intégration par parties :

$u(t) = \ln(1 - 2\alpha\cos t + \alpha^2)$ $\quad u'(t) = \frac{2\alpha\sin t}{1 - 2\alpha\cos t + \alpha^2}$

$v'(t) = 1$ $\quad v(t) = t$.

$$J_\alpha = \left[t \ln(1 - 2\alpha\cos t + \alpha^2) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2\alpha t \sin t}{1 - 2\alpha\cos t + \alpha^2}\, dt$$

$$= \pi \ln(1 + 2\alpha + \alpha^2) - 2\alpha \int_0^\pi \frac{t \sin t}{1 - 2\alpha\cos t + \alpha^2}\, dt$$

Donc : $\boxed{J_\alpha = 2\pi \ln|1+\alpha| - 2\alpha I_\alpha}$

3-a) Soit $z \in \mathbb{C}$, $z^{2n} - 1 = 0 \iff z^{2n} = 1 \iff z \in \mathbb{U}_{2n}$.

Ainsi l'équation $z^{2n} - 1 = 0$ admet $2n$ solutions distinctes qui sont :

$$\boxed{\beta_k = e^{\frac{2ik\pi}{2n}} = e^{\frac{ik\pi}{n}}, \quad k \in [\![0, 2n-1]\!]}$$

b) $\beta_0 = e^{\frac{i0\pi}{n}}$ donc $\boxed{\beta_0 = 1}$

$\beta_n = e^{\frac{in\pi}{n}} = e^{i\pi}$ donc $\boxed{\beta_n = -1}$

c) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On a : $2n - (n-1) \leq 2n - k \leq 2n - 1$

donc $\boxed{2n - k \in [\![n+1, 2n-1]\!]}$

De plus : $\overline{\beta_k} = e^{-\frac{ik\pi}{n}} = e^{2i\pi - \frac{ik\pi}{n}} = e^{\frac{i(2n-k)\pi}{n}}$

D'où $\boxed{\overline{\beta_k} = \beta_{2n-k}}$

d) Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$\prod_{k=1}^{n-1} (z - \overline{\beta_k}) = \prod_{k=1}^{n-1} (z - \beta_{2n-k}) \underset{j=2n-k}{=} \prod_{j=n+1}^{2n-1} (z - \beta_j).$$

Donc $\boxed{\prod_{k=1}^{n-1} (z - \overline{\beta_k}) = \prod_{k=n+1}^{2n-1} (z - \beta_k).}$

e) $$\frac{\alpha^{2n} - 1}{(\alpha+1)(\alpha-1)} = \frac{\prod_{k=0}^{2n-1} (\alpha - \beta_k)}{(\alpha - \beta_n)(\alpha - \beta_0)} = \prod_{k=1}^{n-1} (\alpha - \beta_k) \cdot \prod_{k=n+1}^{2n-1} (\alpha - \beta_k)$$

$$= \prod_{k=1}^{n-1} (\alpha - \beta_k) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (\alpha - \overline{\beta_k})$$

Donc $\boxed{\frac{\alpha^{2n} - 1}{(\alpha+1)(\alpha-1)} = \prod_{k=1}^{n-1} (\alpha - \beta_k)(\alpha - \overline{\beta_k})}$

Ainsi : $$\frac{\alpha^{2n}-1}{(\alpha+1)(\alpha-1)} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(\alpha^2-(\beta_k+\overline{\beta_k})\alpha+\beta_k\overline{\beta_k}\right)$$
$$= \prod_{k=1}^{n-1}\left(\alpha^2-2\mathrm{Re}(\beta_k)\alpha+|\beta_k|^2\right)$$

Donc : $$\boxed{\frac{\alpha^{2n}-1}{(\alpha+1)(\alpha-1)} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(\alpha^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\alpha+1\right)}$$

f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\alpha^2-2\alpha\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right) = \frac{\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\alpha^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\alpha+1\right)\right)$$
$$= \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{\alpha^{2n}-1}{(\alpha+1)(\alpha-1)}\right)$$

Donc $$\boxed{J_\alpha = \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{\alpha^{2n}-1}{(\alpha+1)(\alpha-1)}\right)}$$

4-a) Si $\alpha \in]-1,1[$, alors $\lim_{n\to+\infty}\alpha^{2n}=0$ donc $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{\alpha^{2n}-1}{(\alpha+1)(\alpha-1)}\right) = \ln\left(\frac{-1}{(\alpha+1)(\alpha-1)}\right)$

De plus : $\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}=0$. Donc : $\boxed{J_\alpha = 0}$.

b) Si $|\alpha|>1$, alors $\left|\frac{1}{\alpha}\right|<1$ donc $J_{\frac{1}{\alpha}}=0$.

Or $J_{\frac{1}{\alpha}} = J_\alpha - 2\pi\ln|\alpha|$. Ainsi : $\boxed{J_\alpha = 2\pi\ln|\alpha|}$

5- $$\int_0^\pi \frac{t\sin t}{5-4\cos t}\,dt = \int_0^\pi \frac{t\sin t}{1-2\times 2\cos t+2^2}\,dt = I_2$$

Or : $J_2 = 2\pi\ln|1+2| - 2\times 2\, I_2$.

donc $I_2 = \frac{1}{4}\left(2\pi\ln 3 - J_2\right) = \frac{1}{4}\left(2\pi\ln 3 - 2\pi\ln 2\right)$

D'où : $$\boxed{\int_0^\pi \frac{t\sin t}{5-4\cos t}\,dt = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$$

Problème 2 :

1-a) $(E_1) \iff y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x(1+x^2)}$ sur $]0,+\infty[$.

• On résout $y' + \frac{1}{x} y = 0$. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ est $x \mapsto \ln x$

donc les solutions sont : $]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda e^{-\ln x} = \frac{\lambda}{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

• D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution de (E_1) de la forme $y : x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x}$ avec λ dérivable.

On a : $y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x(1+x^2)} \overset{\forall x \in]0,+\infty[}{\iff} \forall x, \frac{\lambda'(x)}{x} = \frac{1}{x(1+x^2)} \iff \forall x \in]0,+\infty[, \lambda'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Donc $\lambda : x \mapsto \arctan x$ convient et $x \mapsto \frac{\arctan x}{x}$ est solution de (E_1).

Donc les solutions de (E_1) sont :

$$\boxed{\begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\lambda + \arctan x}{x} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.}$$

b) $(E_2) \iff y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x(1+x^2)}$ sur $]0,+\infty[$.

• Les solutions de $y' + \frac{2}{x} y = 0$ sont $]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda e^{-2\ln x} = \frac{\lambda}{x^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

• D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution de (E_2) de la forme $y : x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x^2}$ avec λ dérivable.

On a : $y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x(1+x^2)} \iff \forall x \in]0,+\infty[, \frac{\lambda'(x)}{x^2} = \frac{1}{x(1+x^2)}$

$\iff \forall x \in]0,+\infty[, \lambda'(x) = \frac{x}{1+x^2}$

Donc $\lambda : x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ convient et $x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{2x^2}$ est solution de (E_2).

Donc les solutions de (E_2) sont :

$$\boxed{\begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\lambda}{x^2} + \frac{\ln(1+x^2)}{2x^2} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.}$$

c) $(E_3) \iff y' + \frac{3}{x} y = \frac{1}{x(1+x^2)}$ sur $]0,+\infty[$.

• Les solutions de $y' + \frac{3}{x} y = 0$ sont $]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda e^{-3\ln x} = \frac{\lambda}{x^3}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

• D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution de (E_3) de la forme : $y : x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x^3}$ avec λ dérivable.

On a : $y' + \frac{3}{x} y = \frac{1}{x(1+x^2)} \iff \forall x \in]0,+\infty[,\ \frac{\lambda'(x)}{x^3} = \frac{1}{x(1+x^2)}$

$\iff \forall x \in]0,+\infty[,\ \lambda'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$

Donc $\lambda : x \mapsto x - \arctan x$ convient et $x \mapsto \frac{x - \arctan x}{x^3}$ est solution de (E_3)

Donc les solutions de (E_3) sont :

$$\boxed{\begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\lambda + x - \arctan x}{x^3} \end{array} \quad , \lambda \in \mathbb{R}.}$$

2- $(E_n) \iff y' + \frac{n}{x} y = \frac{1}{x(1+x^2)}$ sur $]0,+\infty[$.

• Les solutions de $y' + \frac{n}{x} y = 0$ sont $\begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{-n \ln x} = \dfrac{\lambda}{x^n} \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

• D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution de (E_n) de la forme : $y : x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x^n}$, λ dérivable.

On a : $y' + \frac{n}{x} y = \frac{1}{x(1+x^2)} \iff \forall x \in]0,+\infty[,\ \frac{\lambda'(x)}{x^n} = \frac{1}{x(1+x^2)}$

$\iff \forall x \in]0,+\infty[,\ \lambda'(x) = \frac{x^{n-1}}{1+x^2}$.

Donc $\lambda = \lambda_n$ convient et $x \mapsto \frac{\lambda_n(x)}{x^n}$ est solution de (E_n).

Donc les solutions de (E_n) sont :

$$\boxed{\begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\lambda_n(x) + \lambda}{x^n} \end{array} \quad , \lambda \in \mathbb{R}.}$$

3 - a) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, soit $t \in [0,x]$.

$$\frac{t^{n-1}}{1+x^2} \leq \frac{t^{n-1}}{1+t^2} \leq t^{n-1}$$

Donc $\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+x^2}\,dt \leq \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^x t^{n-1}\,dt$

D'où : $\frac{1}{1+x^2}\left[\frac{t^n}{n}\right]_0^x \leq \lambda_n(x) \leq \left[\frac{t^n}{n}\right]_0^x$.

Donc : $\boxed{\dfrac{x^n}{n(1+x^2)} \leq \lambda_n(x) \leq \dfrac{x^n}{n}.}$

b). Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\dfrac{1}{n(1+x^2)} \leq \dfrac{\lambda_n(x)}{x^n} \leq \dfrac{1}{n}$.

Donc, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\lambda_n(x)}{x^n} = \dfrac{1}{n}$.

. Soit y une solution de (E_n) sur $]0,+\infty[$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad y(x) = \frac{\lambda_n(x)}{x^n} + \frac{\lambda}{x^n}.$$

De plus y admet une limite finie en 0^+ ssi $x \mapsto \dfrac{\lambda}{x^n}$ admet une limite finie en 0^+ (car $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\lambda_n(x)}{x^n} = \dfrac{1}{n}$).

ssi $\lambda = 0$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$.

Donc $\boxed{\begin{array}{l}(E_n) \text{ admet une unique solution sur }]0,+\infty[\text{ admettant une} \\ \text{limite finie en } 0^+ \text{ qui est } x \mapsto \dfrac{\lambda_n(x)}{x^n}.\end{array}}$