CORRECTION DS 2

Exercice 1 :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$2\sin(2x)(1-\sin x) = \cos x \iff 4\cos x \sin x (1-\sin x) = \cos x$$
$$\iff \cos x (4\sin x(1-\sin x) - 1) = 0$$
$$\iff \cos x (4\sin x - 4\sin^2 x - 1) = 0$$
$$\iff -\cos x (1-2\sin x)^2 = 0$$
$$\iff \cos x = 0 \quad \text{ou} \quad \sin x = \frac{1}{2}$$
$$\iff x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$$

Donc l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}}.$$

Exercice 2 :

- Arccos et Arcsin sont définies sur $[-1,1]$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x+1 \in [-1,1] \\ x^2 \in [-1,1] \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \leq x+1 \leq 1 \\ x^2 \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \iff -1 \leq x \leq 0$

Donc l'équation est définie sur $[-1,0]$.

- Analyse : Supposons qu'il existe $x \in [-1,0]$ tel que $\text{Arccos}(x+1) = \text{Arcsin}(x^2)$

Donc $\sin(\text{Arccos}(x+1)) = \sin(\text{Arcsin}(x^2))$ (E')

On a : $(E') \iff \sqrt{1-(x+1)^2} = x^2$
$$\iff \sqrt{2x-x^2} = x^2$$
$$\iff -2x - x^2 = x^4$$
$$\iff x^4 + x^2 + 2x = 0$$
$$\iff x(x^3 + x + 2) = 0$$
$$\iff x(x+1)(x^2 - x + 2) = 0$$
$$\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -1 \quad \text{ou} \quad x^2 - x + 2 = 0$$

Le discriminant associé à $x^2 - x + 2 = 0$ est $\Delta = -7 < 0$

donc : $(E') \iff x = 0$ ou $x = -1$.

Ainsi $x = 0$ ou $x = -1$.

- **Synthèse :**
  - Pour $x=0$, $\arccos(x+1) = \arccos(1) = 0$ donc $\arccos(x+1) = \arcsin(x^2)$
    $\arcsin(x^2) = \arcsin(0) = 0$
  - Pour $x=-1$, $\arccos(x+1) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ donc $\arccos(x+1) = \arcsin(x^2)$
    $\arcsin(x^2) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$
  - **Conclusion :** L'ensemble des solutions est : $\boxed{\{0,-1\}}$.

Exercice 3 :

1) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a : $0 \leq x < 1$ et $0 \leq k \leq n-1$

Donc $0 \leq x+k < n$ aussi $0 \leq \frac{x+k}{n} < 1$ donc $\left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor = 0$.

D'où : $\boxed{f(x) = 0}$.

2) a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x+1) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+1+k}{n} \right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor$$

$$= \sum_{j=k+1}^{n} \left\lfloor \frac{x+j}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor - 1$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+j}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x+0}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+n}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor - 1$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+j}{n} \right\rfloor - \cancel{\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor} + \cancel{\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor} + 1 - \lfloor x \rfloor - 1$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+j}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$$

$$= g(x)$$

Donc $\boxed{g \text{ est 1-périodique}}$.

b) Soit $x \in [0,1[$, on a $f(x) = 0$ et $\lfloor x \rfloor = 0$

donc $\boxed{g(x) = 0}$.

3) • g est 1-périodique et $g = 0$ sur $[0,1[$ qui est de longueur 1.

Ainsi $g = 0$.

• Donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lfloor x \rfloor}$

Exercice 4 :

1-a) sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi sh est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\left]\lim_{-\infty} sh, \lim_{+\infty} sh\right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Donc $\boxed{sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est bijective.}}$

b) • sh est bijective et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad sh'(x) = ch(x) \neq 0$

Donc $\boxed{\text{argsh est dérivable sur } \mathbb{R}}$

• sur $x \in \mathbb{R}$, $\quad argsh'(x) = \dfrac{1}{sh'(argsh(x))} = \dfrac{1}{ch(argsh(x))}$

On $ch^2(argsh\, x) = 1 + sh^2(argsh(x)) = 1 + x^2$

et $ch(argsh\, x) \geq 0$ donc $ch(argsh\, x) = \sqrt{1+x^2}$.

D'où : $\boxed{argsh'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$

2-a) argsh est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \ 1+x^2 \geq 0$

donc $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

b) • argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sqrt{\ }$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, comme $\forall x \in \mathbb{R}, \ 1+x^2 > 0$,

$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$

• sur $x \in \mathbb{R}$, $\quad f'(x) = 2\, \dfrac{\sqrt{1+x^2} + x \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1 + (2x\sqrt{1+x^2})^2}}$

$$= 2\, \frac{(1+x^2) + x^2}{\sqrt{1+x^2}\ \sqrt{1+4x^2(1+x^2)}} = 2\, \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+4x^2+4x^4}}$$

$$= 2\, \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}\ \sqrt{(1+2x^2)^2}} = 2\, \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}\,(1+2x^2)}$$

Donc : $\boxed{f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}}}$.

3- On a : $f' = 2\, argsh'$. Ainsi il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que : $f = 2\, argsh + C$.

Donc $f(0) = 2\, argsh(0) + C$ Or $sh(0) = 0$ donc $argsh(0) = 0$.

Ainsi $0 = 0 + C$ donc $C = 0$.

D'où : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 2\, argsh(x).}$

Exercice 5 :

1) • $\boxed{f(2) = 1}$ • $\boxed{f(3) = 1}$ car $1|3$ et $2 \nmid 3$

• $f(4) = 1 \times 2$ car $1|4$, $2|4$ et $3 \nmid 4$ donc $\boxed{f(4) = 2}$

• $\boxed{f(5) = 1}$ • $f(6) = 1 \times 2 \times 3$ donc $\boxed{f(6) = 6}$

• $\boxed{f(7) = 1}$ • $f(8) = 1 \times 2 \times 4$ donc $\boxed{f(8) = 8}$

2) Comme p premier, soit $d \in \mathbb{N}^*$, $d|p \iff d = 1$ ou $d = p$

donc $\begin{cases} d|p \\ d \in [\![1, p-1]\!] \end{cases} \iff d = 1$. Ainsi : $\boxed{f(p) = 1}$

3) D'après la décomposition en facteurs premiers, il existe $p_1, \dots, p_n$ nombres premiers 2 à 2 distincts et distincts de p_1, p_2, p_3 et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$n = \prod_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k}.$$

Ainsi $p_1^{\alpha_1} | n$, $p_2^{\alpha_2} | n$ et $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} | n$.

Or, comme $p_3 | n$, $p_1^{\alpha_1} \neq n$, $p_2^{\alpha_2} \neq n$ $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \neq n$

donc $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \in \{ d \in [\![1, n-1]\!], d|n \}$.

Ainsi $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} | f(n)$

Donc $p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2} | f(n)$

De plus $2\alpha_1 \neq \alpha_1$ et $2\alpha_2 \neq \alpha_2$, donc, par unicité de la décomposition en facteurs premiers : $\boxed{f(n) \neq n}$.

4) Par contraposée de 3 : $\boxed{\text{si } f(n) = n \text{ alors } n \text{ admet au plus deux facteurs premiers distincts.}}$

5) Soit $n \geq 2$ tel que n admette au plus deux facteurs premiers distincts.

• S'il existe p_1, p_2 nombres premiers distincts et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}$

. si $\alpha_1 > 1$, alors $p_1^{\alpha_1} | n$ et $p_1^{\alpha_1} \neq n$

$p_1^{\alpha_1 - 1} | n$ et $p_1^{\alpha_1 - 1} \neq n$

donc $p_1^{\alpha_1} \cdot p_1^{\alpha_1 - 1} | f(n)$ d'où $p_1^{2\alpha_1 - 1} | f(n)$

Or $2\alpha_1 - 1 \neq \alpha_1$ donc $f(n) \neq n$ par unicité de la décomposition en facteurs premiers.

- Reste, si $\alpha_2 > 1$, $f(n) \neq n$.
- Si $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, alors $n = p_1 p_2$
  et les diviseurs de n sont : 1, p_1, p_2 et $p_1 p_2$
  donc $f(n) = 1 \times p_1 \times p_2 = n$.
- S'il existe p premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = p^\alpha$.
  Alors les diviseurs de n sont : p^k, $k \in [\![0, \alpha]\!]$.
  Donc $f(n) = \prod_{k=0}^{\alpha-1} p^k = p^{\sum_{k=0}^{\alpha-1} k} = p^{\frac{(\alpha-1)\alpha}{2}}$
  Ainsi $f(n) = n \iff \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} = \alpha \iff \alpha - 1 = 2 \iff \alpha = 3$.
- Donc les entiers $n \geq 2$ tels que $f(n) = n$ sont :

$p_1 p_2$ avec p_1, p_2 nombres premiers distincts
et p^3 avec p premier.

Problème 1 :

1-a) • $f(1) = \operatorname{Arctan}(1) - \operatorname{Arctan}(1) = 0$

• $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}(\sqrt{3}) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$

• $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ donc $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

Ainsi

$f(1) = 0$ $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}$ et $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

b) • Arctan est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x+1}{x^2+1}.$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} - \frac{x^2+1-(x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{x^2+1} - \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-(x^2+1)+x^2+2x-1}{(x^2+1)^2} = \frac{2x-2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

Donc : $\boxed{f''(x) = \frac{2(x-1)}{(x^2+1)^2}}$

c) • f' est continue sur $]0,1[$.

• $\forall x \in]0,1[$, $f''(x) < 0$ donc f' est strictement croissante sur $]0,1[$.

• $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = \frac{\pi}{4} - 1 < 0$

Donc $0 \in \left]\lim\limits_{1} f', \lim\limits_{0} f'\right[$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\boxed{\exists!\ \alpha \in]0,1[,\ f'(\alpha) = 0}$$

d)

x	0		α		1
$f''(x)$	‖	$-$		$-$	0
f'	‖	$\searrow$	0	$\searrow$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ 0	$\nearrow$		$\searrow$	0

e) On a : $f \geq 0$. Donc : $\boxed{\forall x \in]0,1],\ \operatorname{Arctan}(x) \leq x \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)}$

2-a) Soit $x \in]0,1]$, comme $x \leq 1$, $x \leq \frac{1}{x}$.

et comme Arctan croissante : $\boxed{\operatorname{Arctan} x \leq \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)}$.

b) • h est dérivable et, soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$h'(x) = \cos(x) - x\sin x - \cos x = -x\sin x < 0$$

Donc h est strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

• $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$ donc $\boxed{h < 0}$

c) g est dérivable et, sur $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$g'(x) = \frac{\cos x \cdot x - \sin x}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2} < 0$$

Donc $\boxed{g \text{ est décroissante}}$

d) Soit $x \in]0,1]$, on a : $0 < \operatorname{Arctan} x \leq \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} < \frac{\pi}{2}$

Donc $g(\operatorname{Arctan} x) \geqslant g(\operatorname{Arctan} \frac{1}{x})$

On $g(\operatorname{Arctan} x) = \dfrac{\sin(\operatorname{Arctan} x)}{\operatorname{Arctan} x} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}\operatorname{Arctan} x}$

et $g(\operatorname{Arctan} \frac{1}{x}) = \dfrac{\sin(\operatorname{Arctan} \frac{1}{x})}{\operatorname{Arctan} \frac{1}{x}} = \dfrac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\operatorname{Arctan} \frac{1}{x}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}\operatorname{Arctan} \frac{1}{x}}$$

Donc : $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}\operatorname{Arctan} x} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}\operatorname{Arctan} \frac{1}{x}}$.

Ainsi $\boxed{x \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} \geqslant \operatorname{Arctan} x}$.

Problème 2 :

1-a) On a : $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et $\ln$ dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Donc $\boxed{h \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^*}$.

• Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $h'(x) = \frac{1}{x}$

• Soit $x \in \mathbb{R}^{-*}$, $h'(x) = \dfrac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$

Donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad h'(x) = \frac{1}{x}}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| \leq |x-2| \iff -|x-2| \leq x \leq |x-2|$$

$$\iff \begin{cases} -(x-2) \leq x \leq x-2 & \text{si } x \geqslant 2 \\ x-2 \leq x \leq -(x-2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

$|x| \leq |x-2| \iff \begin{cases} 4 \leq 2x \text{ et } 0 \leq -2 & \text{si } x \geq 2 \\ -2 \leq 0 \text{ et } 2x \leq 2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

$\iff x \leq 1.$

Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{]-\infty, 1]}$.

2) $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$

donc $x \mapsto \ln|x|$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto \ln|x-2|$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,2\}$,

$\ln|x-2| = 0 \iff |x-2| = 1 \iff x-2 = 1$ ou $x-2 = -1$

$\iff x = 3$ ou $x = 1$

Donc $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}\setminus\{0,1,2,3\}}$.

3-a) • $x \mapsto \ln|x|$ est dérivable sur son domaine de définition donc

$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathcal{D}}$.

• Soit $x \in \mathcal{D}$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\ln|x-2| - \ln|x| \cdot \frac{1}{x-2}}{(\ln|x-2|)^2}$$

$$= \frac{(x-2)\ln|x-2| - x\ln|x|}{x(x-2)(\ln|x-2|)^2}.$$

Donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(x-2)(\ln|x-2|)^2}}$

b) g est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$ et, soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,2\}$

$$g'(x) = \ln|x-2| + \frac{x-2}{x-2} - \ln|x| - \frac{x}{x}$$

$$= \ln|x-2| - \ln|x|.$$

Donc $g'(x) \geq 0 \iff \ln|x-2| \geq \ln|x|$

$\iff |x-2| \geq |x|$

$\iff x \leq 1$ d'après 1.b.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
g		$\nearrow$ $-2\ln 2 < 0$	‖	$\nearrow$ 0		$\searrow$	‖	$\searrow$ $-2\ln 2 < 0$	

Donc : $\boxed{\forall x \in \mathcal{D},\ g(x) \leq 0}$

c)

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
x	$-$		$+$		$+$		$+$		$+$		
$x-2$	$-$		$-$		$-$		$+$		$+$		
$g(x)$	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		
$f'(x)$	$-$		$+$		$+$		$-$		$-$		
f	1	$\searrow$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$\searrow$	1

4-a) Soit $x \in \mathcal{D}$, $f(x) = \dfrac{\ln|x|}{\ln\left|x\left(1-\frac{2}{x}\right)\right|} = \dfrac{\ln|x|}{\ln|x| + \ln\left|1-\frac{2}{x}\right|}$

Donc : $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{\ln\left|1-\frac{2}{x}\right|}{\ln|x|}}}$

b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \ln\left|1-\frac{2}{x}\right| = 0$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \ln|x| = +\infty$

donc $\boxed{\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1}$.

5-a) On sait que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

De plus $\lim\limits_{x \to 1} |x| = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} |x-2| = 1$.

Donc, par composition : $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln|x|}{|x|-1} = 1 \text{ et } \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln|x-2|}{|x-2|-1} = 1.}$

b) Soit $x \in]0,2[\setminus \{1\}$

$$f(x) = \frac{\ln|x|}{\ln|x-2|} = \frac{\ln|x|}{|x|-1} \cdot \frac{|x|-1}{|x-2|-1} \cdot \frac{|x-2|-1}{\ln|x-2|}$$

$$= \frac{\ln|x|}{|x|-1} \cdot \frac{x-1}{1-x} \cdot \frac{|x-2|-1}{\ln|x-2|}$$

$$= -\frac{\ln|x|}{|x|-1} \cdot \frac{|x-2|-1}{\ln|x-2|}$$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 1^{\pm}} f(x) = -1}$

6) • $\lim_{x\to 0} \ln|x| = -\infty$ et $\lim_{x\to 0} \ln|x-2| = \ln 2 > 0$ donc $\boxed{\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = -\infty}$

• $\lim_{x\to 2} \ln|x| = \ln 2$ et $\lim_{x\to 2} \ln|x-2| = -\infty$ donc $\boxed{\lim_{x\to 2} f(x) = 0}$

• $\lim_{x\to 3} \ln|x| = \ln 3 > 0$ et $\lim_{x\to 3} \ln|x-2| = 0$

or : $\forall x \in]2;3[$, $\ln|x-2| < 0$ donc $\boxed{\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty}$

$\forall x \in]3;+\infty[$, $\ln|x-2| > 0$ donc $\boxed{\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty}$

7-a) Soit $x \in \mathcal{D}$, $\dfrac{f(x)}{x-2} = \dfrac{\ln|x|}{(x-2)\ln|x-2|}$

Or, par croissances comparées, $\lim_{x\to 2} (x-2)\ln|x-2| = 0$

et $\forall x \in]1;2[$, $(x-2)\ln|x-2| > 0$

$\forall x \in]2;3[$, $(x-2)\ln|x-2| < 0$

Donc $\boxed{\lim_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)}{x-2} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)}{x-2} = -\infty}$

b) Comme $\lim_{x\to 2^\pm} f(x) = 0$, on prolonge f en posant $f(2) = 0$

On a alors $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = +\infty$ et $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = -\infty$.

Ainsi $\boxed{f \text{ admet deux demi-tangentes verticales en } 2^+ \text{ et } 2^-.}$

9 -

