PCSI 1

Devoir à la maison n° 1 :

2026/2027

A rendre pour le : lundi 14 septembre

Les résultats doivent être encadrés.

Si vous ne souhaitez pas être noté, merci de le préciser sur votre copie.

Problème 1 :

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite définie par :

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}.$$

1. On considère la fonction :
$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & e^{2x} - e^x - x. \end{array}$$
   (a) Montrer que g est dérivable et déterminer une fonction h telle que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = (e^x - 1)h(x).$$
   (b) Etudier les variations de g.
   (c) Etudier le signe de g.
2. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $a = 0$?
4. Dans cette question, on suppose que $a < 0$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 0.$$
   (b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   (c) Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geq g(a).$$
   (b) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq a + ng(a).$$
   (c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Problème 2 :

On cherche les applications $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n+1) \geq f \circ f(n) + 1 \qquad (1).$$

1. On considère une application $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ vérifiant (1).
   (a) Par récurrence sur n, montrer que :
   $$\forall n, m \in \mathbb{N},\ (m \geq n \Rightarrow f(m) \geq n).$$
   (b) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \geq n.$$
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) < f(n+1)$.
   (d) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) < n+1.$$
   (e) En déduire la valeur de f.
2. Conclure.

Problème 3 :
On appelle involution de $\mathbb{Z}$ toute application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ f \circ f(n) = n.$$

1. Montrer qu'il existe une unique involution de $\mathbb{Z}$ strictement croissante et qu'il s'agit de $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n. \end{array}$
2. (a) Montrer qu'une involution de $\mathbb{Z}$ n'est pas paire.
   (b) Montrer qu'une involution de $\mathbb{Z}$ n'est pas périodique.
3. Soit f une involution de $\mathbb{Z}$. Montrer que :
$$\forall N \in \mathbb{Z},\ \exists! n \in \mathbb{Z},\ f(n) = N.$$
4. Soit f une involution de $\mathbb{Z}$ strictement décroissante.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n+1) = f(n) - 1$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n) = f(0) - n$.
5. (a) Déterminer toutes les involutions de $\mathbb{Z}$ strictement décroissantes.
   (b) Déterminer toutes les involutions de $\mathbb{Z}$ strictement monotones.
   (c) Déterminer toutes les involutions de $\mathbb{Z}$ strictement monotones et impaires.
6. On pose :
$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & n & \mapsto & \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{array}$$
   (a) Montrer que f est une involution de $\mathbb{Z}$.
   (b) f est-elle strictement monotone ? On justifiera la réponse.