Devoir à la maison n° 2 :

A rendre pour le : lundi 5 octobre

Les résultats doivent être encadrés.

Si vous ne souhaitez pas être noté, merci de le préciser sur votre copie.

Exercice 1 :

Soit m un nombre premier, montrer que :

$$\exists!(a,b)\in\mathbb{N}^2,\ 4m=a^2-b^2.$$

Problème 1 :

1. Préliminaires.
   (a) Montrer que :
   $$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ \sin x<x<\tan x.$$
   (b) Montrer que :
   $$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ 2\cos(2x)+2\tan^2(x)-2=-\frac{1}{2}(1+\tan^2(x))\tan(x)\sin(4x).$$
   (c) Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan x}{x}$.
2. On pose :
   $$\begin{array}{rccl} f: &]0,\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sin^2 x+x\tan x-2x^2. \end{array}$$
   (a) Justifier que f est deux fois dérivable et montrer que :
   $$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ f''(x)=\frac{1}{2}(1+\tan^2(x))\tan(x)(4x-\sin(4x)).$$
   (b) En déduire que : $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}[,\ f(x)>0$.
   (c) En déduire l'inégalité de Winkler :
   $$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+\frac{\tan x}{x}>2.$$
   (d) Montrer que 2 est le meilleur minorant de la fonction $x\mapsto\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+\frac{\tan x}{x}$ sur $]0,\frac{\pi}{2}[$.
3. On pose :
   $$\begin{array}{rccl} g: &]0,\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2+\frac{x}{\tan x}-2. \end{array}$$
   (a) Justifier que g est dérivable et déterminer une fonction simple h telle que :
   $$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ g'(x)=\left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+\frac{\tan x}{x}-2\right).h(x).$$
   (b) En déduire que :
   $$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2+\frac{x}{\tan x}>2.$$

Problème 2 :

Soient $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $0<b<a$. On pose :

$$\begin{array}{rccl} f: & \left[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathrm{Arcsin}\,(ax)+\mathrm{Arccos}\,(bx). \end{array}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\left]-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right[$. Déterminer f' et en déduire que f est strictement croissante.
2. Montrer que f est bijective de $I=\left[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right]$ vers $J=\left[-\frac{\pi}{2}+\mathrm{Arccos}\left(-\frac{b}{a}\right),\frac{\pi}{2}+\mathrm{Arccos}\left(\frac{b}{a}\right)\right]$.
3. Soit $x\in I$. Exprimer $\cos f(x)$. Montrer que $\cos f(x)$ est du signe de $-x$.
4. Soit $x\in I$. Exprimer $\sin f(x)$. Montrer que :
   $$\cos^2(f(x))=x^2\left(a^2+b^2-2ab\sin f(x)\right).$$
5. Soit $y\in J$, déterminer une expression de $f^{-1}(y)$.
6. Application : résoudre l'équation :
   $$\mathrm{Arcsin}\,\frac{4x}{5}+\mathrm{Arccos}\,\frac{2x}{5}=\frac{\pi}{6}.$$