Devoir à la maison n° 3 :

A rendre pour le : lundi 2 novembre

Les résultats doivent être encadrés.

Si vous ne souhaitez pas être noté, merci de le préciser sur votre copie.

Problème 1 :

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \text{ et } T_n = \sum_{k=0}^{n} k a_k a_{n-k}.$$

1. Calculer a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 ainsi que S_0, S_1, S_2 et S_3. Que remarque-t-on ?
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k) a_k a_{n-k}.$$
En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2T_n = nS_n.$$
3. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n.$$
4. Déduire des questions précédentes que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n,$$
puis que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n+3}{2} S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n.$$
5. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = a_{n+1}.$$
6. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in \mathbb{N}.$$

Problème 2 :

On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & z & \mapsto & \dfrac{\mathrm{Im}(z^5)}{(\mathrm{Im}(z))^5}. \end{array}$$

1. (a) Calculer $f(i)$.
   (b) Déterminer la forme trigonométrique de $1+i$ et calculer $f(1+i)$.
   (c) Déterminer la forme trigonométrique de $\sqrt{3}-i$ et calculer $f(\sqrt{3}-i)$.
2. (a) Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, on pose : $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^*$.
      i. Calculer $\mathrm{Im}(z^5)$ en fonction de x et y.
      ii. On pose : $X = \frac{x}{y}$, montrer que $f(z)$ est un polynôme en X que l'on déterminera.
   (b) Montrer que :
   $$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R},\ f(z) \geq -4.$$
   (c) Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$:
   $$f(z) = -4.$$
3. On souhaite retrouver les résultats de la question 2 en utilisant une autre méthode. On n'utilisera donc pas les résultats de la question 2.
   (a) Soit $r \in \mathbb{R}^{+*}$, soit $\theta \in \mathbb{R}$. A quelle condition a-t-on :
   $$re^{i\theta} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} ?$$
   (b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.
   (c) Soient $r \in \mathbb{R}^{+*}$, $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $re^{i\theta} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. On pose : $X = \frac{1}{\sin^2(\theta)}$. Montrer que $f(re^{i\theta})$ est un polynôme en X que l'on déterminera.
   (d) Montrer que :
   $$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R},\ f(z) \geq -4.$$
   (e) Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$:
   $$f(z) = -4.$$