Devoir à la maison n° 4 :

A rendre pour le : lundi 16 novembre

Les résultats doivent être encadrés.

Si vous ne souhaitez pas être noté, merci de le préciser sur votre copie.

Problème 1 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$. On définit :

$$\begin{array}{rccc} f_\alpha : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \ln(1-2\alpha\cos(t)+\alpha^2). \end{array}$$

1. Montrer que f_α est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   On pose alors :
   $$J_\alpha = \int_0^\pi f_\alpha(t)\,dt.$$
2. (a) Montrer que, si $\alpha \neq 0$:
   $$J_{1/\alpha} = J_\alpha - 2\pi\ln(|\alpha|).$$
   (b) En effectuant le changement de variable $t = \pi - x$, montrer que $J_\alpha = J_{-\alpha}$.
   (c) En intégrant par parties, déterminer une relation entre J_α et :
   $$I_\alpha = \int_0^\pi \frac{t\sin(t)}{1-2\alpha\cos(t)+\alpha^2}\,dt.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
   $$z^{2n} - 1 = 0$$
   admet $2n$ solutions distinctes notées β_k, $k \in [\![0, 2n-1]\!]$ que l'on déterminera.
   On admet que :
   $$\forall z \in \mathbb{C},\ z^{2n} - 1 = \prod_{k=0}^{2n-1}(z-\beta_k).$$
   (b) Calculer et simplifier β_0 et β_n.
   (c) Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $2n-k \in [\![n+1, 2n-1]\!]$ et $\overline{\beta_k} = \beta_{2n-k}$.
   (d) Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C},\ \prod_{k=n+1}^{2n-1}(z-\beta_k) = \prod_{k=1}^{n-1}(z-\overline{\beta_k})$.
   (e) En déduire que :
   $$\frac{\alpha^{2n}-1}{(\alpha+1)(\alpha-1)} = \prod_{k=1}^{n-1}(\alpha-\beta_k)(\alpha-\overline{\beta_k}) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(\alpha^2 - 2\alpha\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right).$$
   (f) On admet que :
   $$J_\alpha = \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\alpha^2 - 2\alpha\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right).$$
   Montrer que :
   $$J_\alpha = \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{\alpha^{2n}-1}{(\alpha+1)(\alpha-1)}\right).$$
4. (a) Montrer que $J_\alpha = 0$ si $\alpha \in]-1,1[$.
   (b) En déduire J_α si $|\alpha| > 1$. On pourra utiliser un des résultats de la question 2.
5. Calculer :
   $$\int_0^\pi \frac{t\sin(t)}{5-4\cos(t)}\,dt.$$

T.S.V.P.

Problème 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit (E_n) l'équation différentielle :

$$(E_n) \quad xy' + ny = \frac{1}{1+x^2}.$$

1. (a) Résoudre (E_1) sur $]0,+\infty[$.
   (b) Résoudre (E_2) sur $]0,+\infty[$.
   (c) Résoudre (E_3) sur $]0,+\infty[$.
2. Soit $n \geq 4$ et soit :

$$\lambda_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2}\,dt \end{array}.$$

   Déterminer l'ensemble des solutions de (E_n)sur $]0,+\infty[$ en fonction de λ_n.
3. (a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{x^n}{n(1+x^2)} \leq \lambda_n(x) \leq \frac{x^n}{n}.$$

   (b) En déduire que (E_n) admet une unique solution sur $]0,+\infty[$ ayant une limite finie en 0^+.