PCSI 1 **Devoir surveillé n° 2 :** 2026/2027

Samedi 10 octobre

3 h

Les résultats doivent être encadrés.

Les calculatrices sont interdites.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 :

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$2\sin(2x)\big(1-\sin(x)\big) = \cos(x).$$

On écrira l'ensemble des solutions.

Exercice 2 :

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{Arccos}\,(x+1) = \text{Arcsin}\,(x^2).$$

Exercice 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor. \end{array}$$

1. Soit $x \in [0,1[$, calculer $f(x)$.
2. On pose $g : x \mapsto f(x) - \lfloor x \rfloor$.
   (a) Montrer que g est 1-périodique.
   (b) Soit $x \in [0,1[$, calculer $g(x)$.
3. En déduire une expression simple de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 :

1. (a) Montrer que la fonction sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective. On notera argsh sa bijection réciproque.
   (b) Montrer que argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée. On donnera une expression de la dérivée ne faisant pas apparaître de fonctions trigonométriques hyperboliques.
2. On pose :
$$f : x \mapsto \text{argsh}\,(2x\sqrt{1+x^2}).$$
   (a) Déterminer le domaine de définition D de f.
   (b) Etudier la dérivabilité de f et calculer f'.
3. En déduire, pour $x \in D$, une expression de $f(x)$ en fonction de argsh (x).

Exercice 5 :

On pose :

$$\forall n \geq 2,\ f(n) = \prod_{\substack{d \in [\![1,n-1]\!], \\ d|n}} d.$$

1. Calculer $f(n)$ pour $n \in [\![2,8]\!]$.
2. Calculer $f(p)$ pour p premier.
3. Soit $n \geq 2$. Supposons qu'il existe p_1, p_2, p_3 nombres premiers distincts tels que $p_1|n$, $p_2|n$ et $p_3|n$. Montrer que $f(n) \neq n$.
4. Soit $n \geq 2$. Montrer que si $f(n) = n$, alors n admet au plus deux facteurs premiers distincts.
5. En déduire les entiers $n \geq 2$ tels que :
$$f(n) = n.$$

Problème 1 :
L'objectif de ce problème est de montrer que :

$$\forall x \in]0,1], \text{Arctan}(x) \leq x\text{Arctan}(\frac{1}{x}).$$

1. Première méthode :
   On pose :
   $$\begin{array}{rccc} f: &]0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x\text{Arctan}(\frac{1}{x}) - \text{Arctan}(x). \end{array}$$
   (a) Calculer $f(1)$, $f(\frac{1}{\sqrt{3}})$ et $\lim_{x\to 0} f(x)$.
   (b) Justifier que f est deux fois dérivable et calculer f''.
   (c) Montrer que : $\exists! \alpha \in]0,1[$, $f'(\alpha) = 0$.
   (d) En déduire les variations de f.
   (e) Conclure.
2. Deuxième méthode :
   (a) Montrer que :
   $$\forall x \in]0,1], \text{Arctan}(x) \leq \text{Arctan}(\frac{1}{x}).$$
   (b) On pose :
   $$\begin{array}{rccc} h: &]0,\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x\cos(x) - \sin(x). \end{array}$$
   Etudier le signe de h.
   (c) On pose :
   $$\begin{array}{rccc} g: &]0,\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{\sin(x)}{x}. \end{array}$$
   Montrer que g est décroissante.
   (d) Conclure.

Problème 2 :
L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{\ln|x|}{\ln|x-2|}.$$

1. Questions préliminaires :
   (a) On pose $\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln|x|. \end{array}$.
   Justifier que h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^*, h'(x) = \frac{1}{x}.$$
   (b) Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
   $$|x| \leq |x-2|.$$
2. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.
3. (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et exprimer f' en fonction de la fonction :
   $$g : x \mapsto (x-2)\ln|x-2| - x\ln|x|.$$
   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathcal{D}$, $g(x) \leq 0$.
   (c) En déduire les variations de f.
4. (a) Montrer que :
   $$\forall x \in \mathcal{D}, f(x) = \frac{1}{1 + \frac{\ln|1-\frac{2}{x}|}{\ln|x|}}.$$
   (b) En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. (a) Montrer que : $\lim_{x\to 1} \frac{\ln|x|}{|x|-1} = 1$ et $\lim_{x\to 1} \frac{\ln|x-2|}{|x-2|-1} = 1$.
   (b) En déduire les limite en 1^+ et 1^- de f.
6. Compléter le tableau de variations de f en calculant et justifiant les limites manquantes.
7. (a) Calculer $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x-2}$.
   (b) Comment peut-on interpréter graphiquement ce résultat ?
8. Tracer f.