Indications
DM 1

Problème 1 :

1. (a) Forcer l'apparition du facteur $e^x - 1$.
   (b) Se ramener à l'étude du signe de $x \mapsto e^x - 1$.
   (c) Utiliser le tableau de variations et la valeur de $g(0)$.
2. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ à l'aide de la fonction g.
3. Intuiter la réponse et faire la preuve par récurrence.
4. (a) Raisonner par récurrence.
   (b) Utiliser 2. et 4.(a).
   (c) Faire un passage à la limite et étudier l'annulation de g.
5. (a) Utiliser un argument de monotonie pour (u_n) et pour g.
   (b) Raisonner par récurrence.
   (c) Remarquer que $g(a) > 0$.

Problème 2 :

1. (a) L'hypothèse de récurrence est : $\forall m \in \mathbb{N}$, $(m \geq n \Rightarrow f(m) \geq n)$ et le résultat à montrer est : $\forall m \in \mathbb{N}$, $(m \geq n+1 \Rightarrow f(m) \geq n)$.
   Pour $m \geq n+1$, commencer par justifier que $f(m) \geq n$ puis montrer que $f(m) \neq n$ en raisonnant par l'absurde. Pour cela, on pourra appliquer (1) à $m-1$.
   (b) Appliquer la question précédente à m bien choisi.
   (c) Appliquer la question précédente à $f(n)$.
   (d) Remarquer que la question précédente signifie que f est strictement croissante.
   (e) Utiliser 1.(b) et 1.(d).
2. Remarquer que la question 1. est une analyse et faire la synthèse.

Problème 3 :

1. Raisonner par analyse-synthèse et raisonner par l'absurde dans l'analyse.
2. (a) Raisonner par l'absurde.
   (b) Raisonner par l'absurde.
3. Fixer N et raisonner par analyse-synthèse pour prouver l'existence et l'unicité de n.
4. (a) Raisonner par l'absurde et appliquer 3. à $f(n+1)+1$.
   (b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = f(0) - n$ et $f(-n) = f(0) - (-n)$.
5. (a) Remarquer que la question 4. est une analyse et faire la synthèse. Attention à ne pas exprimer f en fonction d'elle même.
   (b) Utiliser 1. et 5.(a).
   (c) Parmi les fonctions obtenues à la question précédente, déterminer celles qui sont impaires.
6. (a) Faire une disjonction de cas selon la parité de n.
   (b) Trouver deux contre-exemples.