Chapitre 11 : Suites numériques

I Limite d'une suite réelle

1.1 Généralités

Définition 1

- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ ou tend vers l, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ ou $u_n \to l$, si et seulement si
$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geq N \implies |u_n - l| \leq \varepsilon.$$
- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge sinon.

Définition 2

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ ou tend vers $+\infty$, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou $u_n \to +\infty$, si
$$\forall A \in \mathbb{R}\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geq N \implies u_n \geq A.$$
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge $-\infty$ ou tend vers $-\infty$, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ ou $u_n \to -\infty$, si
$$\forall A \in \mathbb{R}\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geq N \implies u_n \leq A.$$

Remarque : Une suite divergente peut : diverger vers $+\infty$, diverger vers $-\infty$, ou ne pas avoir de limite.

Proposition 1

Si la limite d'une suite (u_n) existe alors elle est unique. On la note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou $\lim u_n$.

➪ **Exemple 1 :** Montrons que : $\lim \dfrac{1}{n} = 0$.

➪ **Exemple 2 :** Soit (u_n) une suite réelle telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{Z}.$$
Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_n) est stationnaire.

1.2 Propriétés des suites convergentes

Proposition 2

Soient (u_n) une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l alors $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|l|$.

Remarque : La réciproque est fausse : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$. $(|u_n|)$ est constante égale à 1 donc converge vers 1 mais (u_n) est divergente.

Proposition 3

Toute suite réelle convergente est bornée.

Remarque : La réciproque est fausse : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$. (u_n) est bornée mais divergente.

Proposition 4

Soient (u_n) une suite réelle et $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si (u_n) admet une limite l alors :

- Pour tout $M > l$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \geq N,\ u_n \leq M.$$
- Pour tout $m < l$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \geq N,\ u_n \geq m.$$

Corollaire 1

Soit (u_n) une suite réelle.

- Si (u_n) converge vers $l > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.
- Si (u_n) converge vers $l < 0$, alors $u_n < 0$ à partir d'un certain rang.

➪ **Exemple 3 :** Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que :

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, \text{ avec } l < 1.$$

Montrer que : $\lim u_n = 0$.

1.3 Opérations sur les limites

Proposition 5

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites qui convergent respectivement vers $l, l' \in \mathbb{R}$.

- Alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l + l'$.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λl.
- $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ll'.
- Si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}^*$, $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $\frac{1}{l}$.

Proposition 6

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Alors $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

Proposition 7

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minorée et si $\lim v_n = +\infty$, alors $\lim(u_n + v_n) = +\infty$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite majorée et si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim(u_n + v_n) = -\infty$.
- Si $\lim u_n = +\infty$ et si $\lim v_n = +\infty$, alors $\lim(u_n + v_n) = +\infty$.
- Si $\lim u_n = -\infty$ et si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim(u_n + v_n) = -\infty$.

Proposition 8

- Si $\lim u_n = l \in \mathbb{R}^{+*}$ et si $\lim v_n = +\infty$, alors $\lim(u_n.v_n) = +\infty$.
- Si $\lim u_n = l \in \mathbb{R}^{-*}$ et si $\lim v_n = +\infty$, alors $\lim(u_n.v_n) = -\infty$.
- Si $\lim u_n = l \in \mathbb{R}^{+*}$ et si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim(u_n.v_n) = -\infty$.
- Si $\lim u_n = l \in \mathbb{R}^{-*}$ et si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim(u_n.v_n) = +\infty$.

Proposition 9

- Si $\lim u_n = +\infty$ et si $\lim v_n = +\infty$, alors $\lim(u_n.v_n) = +\infty$.
- Si $\lim u_n = +\infty$ et si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim(u_n.v_n) = -\infty$.
- Si $\lim u_n = -\infty$ et si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim(u_n.v_n) = +\infty$.

Proposition 10

- Si $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim \frac{1}{u_n} = 0$.
- Si $\lim u_n = -\infty$, alors $\lim \frac{1}{u_n} = 0$.
- Si $\lim u_n = 0$ et si : $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $u_n > 0$, alors $\lim \frac{1}{u_n} = +\infty$.
- Si $\lim u_n = 0$ et si : $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $u_n < 0$, alors $\lim \frac{1}{u_n} = -\infty$.

Remarque : Si $\lim u_n = 0$, on ne peut pas dire que $\lim \frac{1}{u_n} = \pm\infty$ car la limite peut ne pas exister. Par exemple : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. On a $\lim u_n = 0$ mais $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{u_n} = (-1)^n n$ n'a pas de limite.

Méthode 1

En pratique, pour calculer une limite, on utilise les opérations mais dans le cas où il s'agit d'une forme indéterminée, il faut trouver une autre méthode.

- Si $\lim u_n = +\infty$ et $\lim v_n = +\infty$, pour étudier la convergence de $(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})$ on peut utiliser la quantité conjuguée c'est-à-dire :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{u_n} - \sqrt{v_n} = \frac{u_n - v_n}{\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}},$$
on a $\lim(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}) = +\infty$, il faut alors étudier la convergence de $(u_n - v_n)$.
- Si $\lim u_n = +\infty$ et $\lim v_n = +\infty$, pour étudier la convergence de $(\frac{u_n}{v_n})$, on peut factoriser (u_n) et (v_n) par leur terme dominant.
- Si $\lim u_n = 1$ et $\lim v_n = +\infty$, pour étudier la convergence de $(u_n^{v_n})$, on écrit :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^{v_n} = e^{v_n \ln(u_n)}.$$
On se ramène alors à l'étude du produit $(v_n \ln(u_n))$.

➪ **Exemple 4 :** Calculer :

- $\lim \dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$
- $\lim \dfrac{\sin n^4}{n}$
- $\lim \dfrac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n}$
- $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
- $\lim \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$
- $\lim \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$

➪ **Exemple 5 :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle qui converge vers $l \in \mathbb{R}$. On pose :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$
Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l.
Ce résultat s'appelle le théorème de Césaro.

1.4 Passage à la limite dans les inégalités

Proposition 11

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes, vers l et l'. On a :
$$(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n) \Longrightarrow l \leq l'.$$

Remarque : Les inégalités strictes ne sont pas conservées par passage à la limite. Par exemple, pour : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \frac{1}{n}$, $v_n = 1 + \frac{1}{n}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n < v_n$ mais $\lim u_n = \lim v_n = 1$.

1.5 Existence de limite et inégalités

Théorème 1 : Théorème d'encadrement

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites vérifiant :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq w_n$
- Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$.

Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

Corollaire 2

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles, soit $l\in\mathbb{R}$. On suppose que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n-l|\leq v_n \text{ et } \lim v_n=0.$$

Alors :

$$\lim u_n = l.$$

Théorème 2

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

1. Si $\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq v_n\\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty\end{cases}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.
2. Si $\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq v_n\\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty\end{cases}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

➪ **Exemple 6 :** Calculer :

- $\lim \dfrac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n}}$
- $\lim u_n$ avec : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k}$

II Suites monotones

2.1 Borne supérieure, borne inférieure

Définition 3

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- Si A est majorée, soit F l'ensemble des majorants de A. Si F admet un minimum, alors ce minimum est appelé **borne supérieure de** A et est noté $\sup(A)$.
- Si A est minorée, soit G l'ensemble des minorants de A. Si G admet un maximum, alors ce maximum est appelé **borne inférieure de** A et est noté $\inf(A)$.

Par convention :

- Si A n'est pas majorée, on pose $\sup(A)=+\infty$.
- Si A n'est pas minorée, on pose $\inf(A)=-\infty$.

Proposition 12

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- Si A admet un maximum, alors A admet une borne supérieure et on a : $\max(A)=\sup(A)$.
- Si A admet un minimum, alors A admet une borne inférieure et on a : $\min(A)=\inf(A)$.

Théorème 3

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Remarque : Toute partie non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

➪ **Exemple 7 :** Déterminer, si elles existent, les bornes supérieure et inférieure des ensembles suivants :

1. $A=\left\{\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$,
2. $B=\left\{\frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

➪ **Exemple 8 :** Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. On note :

$$-A=\{-x,\ x\in A\},$$

$$A+B=\{x+y,\ x\in A,\ y\in B\},$$

1. Montrer que $\sup(-A)=-\inf(A)$.
2. Montrer que $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$.

2.2 Théorème de la limite monotone

Théorème 4 : Théorème de la limite monotone

- Toute suite croissante et majorée de réels converge.
- Toute suite décroissante et minorée de réels converge.

Proposition 13

- Toute suite croissante et non majorée de réels diverge vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante et non minorée de réels diverge vers $-\infty$.

Remarque : Une suite non majorée ne diverge pas nécessairement vers $+\infty$. Ex : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n.n$.

Corollaire 3

Toute suite monotone admet une limite (finie ou infinie).

➪ **Exemple 9 :** On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + e^{-k})$. Montrons que (u_n) converge.

Proposition 14

Soit (u_n) une suite qui converge vers $l \in \mathbb{R}$.

- Si (u_n) est croissante alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq l$.
- Si (u_n) est décroissante alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq l$.
- Si (u_n) est strictement croissante alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < l$.
- Si (u_n) est strictement décroissante alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > l$.

Proposition 15

Soit $q \in \mathbb{R}$, posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n$.

- Si $|q| < 1$, alors $\lim u_n = 0$.
- Si $q = 1$, alors $\lim u_n = 1$.
- Si $q > 1$, alors $\lim u_n = +\infty$.
- Si $q \leq -1$, (u_n) n'a pas de limite.

2.3 Suites récurrentes d'ordre 1

Définition 4

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que I est un intervalle stable par f ssi $f(I) \subset I$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in I,\ f(x) \in I.$$

Proposition 16

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que I est stable par f. Alors la suite :

$$u_0 \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

est bien définie et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I.$$

Proposition 17

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{R}$. On considère la suite définie par :

$$u_0 \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

On suppose que (u_n) converge vers $l \in I$ et que f est continue en l. Alors :

$$l = f(l).$$

Méthode 2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que I **est stable par** f.
On considère la suite définie par :

$$u_0 \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

- Comme I est stable par f alors (u_n) est bien définie et est à valeurs dans I.
- Pour étudier la monotonie de (u_n), on peut :
  - Etudier le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$.
    En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) = f(u_n) - u_n = u_{n+1} - u_n$. Donc la monotonie de (u_n) se déduit du signe de g.
  - Si f **est croissante**, on montre par récurrence que (u_n) est monotone. Plus précisément :
    - Si $u_0 \leq u_1$, alors (u_n) est croissante,
    - Si $u_0 \geq u_1$, alors (u_n) est décroissante.

    Il faut donc connaître le signe de $u_1 - u_0$:
    - Si u_0 est donné de façon explicite, on calcule u_1 et on en déduit le signe de $u_1 - u_0$.
    - Sinon, on étudie le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$, et on utilise $u_1 - u_0 = g(u_0)$.

  On sait donc que (u_n) est monotone.
- Pour étudier la convergence de (u_n).
  - Si I est borné, comme (u_n) est à valeurs dans I, alors (u_n) est bornée. Et comme (u_n) est monotone, (u_n) est convergente.
  - Si I n'est pas borné.
    - On regarde si on ne peut pas trouver un autre intervalle stable qui soit borné.
    - Sinon, on raisonne par l'absurde et on suppose que (u_n) est convergente. On applique alors la suite de la méthode en espérant obtenir une contradiction.

    On sait donc que (u_n) converge. Posons $l = \lim u_n$.
- Si **f est continue sur** I **et** $l \in I$, alors, comme : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, on a, par passage à la limite : $f(l) = l$.
  On résout donc l'équation $f(l) = l$. Si l'équation admet plusieurs solutions dans I, on utilise la monotonie de (u_n) pour trouver la valeur de la limite.

➪ **Exemple 10 :** Etudier la convergence des suites définies par :

1. $u_0 = \frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$.
2. $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2}{\pi}\text{Arcsin}(u_n)$.
3. $u_0 \in \mathbb{R}$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n.e^{-u_n}$.

2.4 Théorème des suites adjacentes

Définition 5

On dit que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante
- $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Proposition 18

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites adjacentes avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante. Alors :

$$\forall n, p \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_p.$$

Théorème 5

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

➪ **Exemple 11 :** Montrer que les suites suivantes sont adjacentes :
$u_0 = 0$, $v_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$

2.5 Approximations décimales d'un réel

Proposition 19

Soit $x \in \mathbb{R}$, posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \text{ et } b_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}.$$

Alors, les suites (a_n) et (b_n) sont des suites adjacentes et :

$$\lim a_n = \lim b_n = x.$$

Remarque : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont des nombres décimaux et $a_n \leq x \leq b_n$ et, de plus, $b_n - a_n = 10^{-n}$.
On dit que $a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est une approximation décimale de x à 10^{-n} près par défaut et que $b_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est une approximation décimale de x à 10^{-n} près par excès.

Corollaire 4

Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

III Suites extraites

3.1 Définition

Définition 6

On appelle suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou encore sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.

Remarque : (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites extraites de (u_n).

3.2 Limite

Théorème 6

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite l (finie ou infinie), alors toutes ses suites extraites tendent vers la même limite l.

Corollaire 5

Soit (u_n) une suite de nombres réels.
- Si (u_n) admet une suite extraite divergente, alors (u_n) diverge.
- Si (u_n) admet deux suites extraites convergeant vers des limites distinctes, alors (u_n) n'a pas de limite.

➪ **Exemple 12 :**
- Montrer que $((-1)^n)$ n'a pas de limite.
- Montrer que $(u_n) = (\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor)$ n'a pas de limite.

Proposition 20

Soit (u_n) une suite de nombres réels. Si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) possède une même limite l (finie ou infinie) alors (u_n) tend vers l.

➪ **Exemple 13 :** Etudier la convergence de la suite définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2}{1 + u_n}.$$

IV Suites complexes

4.1 Convergence

Définition 7

Soit (z_n) une suite complexe

- La partie réelle de la suite (z_n) est la suite réelle (x_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \mathrm{Re}(z_n).$$

- La partie imaginaire de la suite (z_n) est la suite réelle (y_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = \mathrm{Im}(z_n).$$

Définition 8

- On dit qu'une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{C}$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists N \in \mathbb{N}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geq N \implies |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

- On dit qu'une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi il existe un complexe $l \in \mathbb{C}$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Proposition 21

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $l \in \mathbb{C}$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si et seulement si $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $\mathrm{Re}(l)$ et $\mathrm{Im}(l)$.

4.2 Suites bornées

Définition 9

On dit qu'une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ssi :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M.$$

Proposition 22

Toute suite complexe convergente est bornée.

4.3 Opérations sur les suites complexes

Proposition 23

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes qui convergent respectivement vers $l \in \mathbb{C}$ et $l' \in \mathbb{C}$.

- Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda l + \mu l'$.
- $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ll'.
- Si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{C}$ et (v_n) converge vers $l' \in \mathbb{C}^*$, $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $\dfrac{l}{l'}$.

4.4 Suites géométriques

Proposition 24

Soit $q \in \mathbb{C}$, posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n$.

- Si $|q| < 1$, alors $\lim u_n = 0$.
- Si $q = 1$, alors $\lim u_n = 1$.
- Si $q \in \mathbb{R}$ et $q > 1$, alors $\lim u_n = +\infty$.
- Sinon, (u_n) n'a pas de limite.

➪ **Exemple 14 :** On pose :

$$z_0 \in \mathbb{C} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{1}{3}(2z_n - \overline{z_n}).$$

Etudier la convergence de (z_n).

En résumé :

Ce qui reste valable :	**Ce qui n'est plus valable :**
Unicité de la limite	Monotonie
Une suite convergente est bornée	Majorant/minorant
Opérations sur les limites	Limites infinies
Résultats sur les suites extraites	Passage à la limite dans les inégalités larges
Résultats sur les suites arithmétiques	Théorème de convergence par encadrement
Résultats sur les suites géométriques	Théorèmes de divergence par minoration/majoration
Résultats sur les suites arithmético-géométriques	Théorème de la limite monotone
Résultats sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2	Suites adjacentes