# Chapitre 9 : Equations différentielles

Dans tout le chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

## I Equations différentielles linéaire du premier ordre

### 1.1 Définition

**Définition 1**

Soient $a, b : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues sur $I$.

- On dit que $y : I \to \mathbb{K}$ est solution de l'équation différentielles linéaire d'ordre un $y' + a(x)y = b(x)$ si et seulement si : $y$ est dérivable sur $I$ et $\forall x \in I,\ \ y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$.
- On appelle équation homogène (ou sans second membre) associée à $(E)$, l'équation :

$$y' + a(x)y = 0 \quad (E_0)$$

### 1.2 Résolution de l'équation homogène

**Proposition 1**

Soit $a : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur $I$ et $A : I \to \mathbb{K}$ une primitive de $a$ sur $I$.
Les solutions sur $I$ de $(E_0) : y' + a(x)y = 0$ sont les fonctions $\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-A(x)} \end{array}$ , $\lambda \in \mathbb{K}$.

➪ **Exemple 1 :** Résoudre l'équation différentielle :

$$y' + xy = 0.$$

**Corollaire 1**

Soit $a \in \mathbb{K}$, les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' + ay = 0$ sont les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-ax} \end{array}, \lambda \in \mathbb{K}.$$

**Corollaire 2**

Soit $a : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur $I$ soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Il existe une unique solution de l'équation $y' + a(x)y = 0$ telle que $y(x_0) = y_0$ qui est : $\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt} \end{array}$ .

**Remarque :** Le système constitué de l'équation différentielle et de la condition intiale :

$$\begin{cases} y' + a(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

s'appelle un problème de Cauchy.

### 1.3 Résolution de l'équation avec second membre

**Proposition 2**

Soient $a, b : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues sur $I$.
L'équation $y' + a(x)y = b(x)$ admet au moins une solution.

**Proposition 3**

Soient $a, b : I \to \mathbb{K}$ continues sur $I$ et $(E)$ : $\quad y' + a(x)y = b(x)$.
Si $y_p$ est une solution particulière de $(E)$ et si $S_0$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à $(E)$, alors l'ensemble $S$ des solutions de $(E)$ est :

$$S = \{y_p + y_0 \ , \ y_0 \in S_0\}.$$

**Remarque :** Les solutions de l'équation avec second membre sont la somme **des** solutions de l'équation homogène et d'**une** solution particulière.

➪ **Exemple 2 :** Résoudre l'équation différentielle :

$$y' + xy = x.$$

➪ **Exemple 3 :** Résoudre l'équation différentielle :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau}.$$

**Méthode 1**

L'équation différentielle :

$$y' + ay = b\cos(\alpha x) + c\sin(\alpha x),$$

avec $a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$ admet une solution particulière de la forme :

$$x \mapsto A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x),$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$.

➪ **Exemple 4 :** Résoudre l'équation différentielle :

$$y' - y = -2\sin x.$$

➪ **Exemple 5 :** Déterminer les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in [0,1],\ f'(x) - f(x) = f(0) + f(1).$$

**Proposition 4**

Soit $(E)$ l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$ où $a$ et $b$ sont continues sur $I$. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.
Il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{K}$ de $(E)$ telle que $y(x_0) = y_0$.

## 1.4 Principe de superposition

**Proposition 5 (Principe de superposition)**

Soient $a, b : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues.
On suppose que $b = \sum_{k=1}^{n} b_k$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $b_k : I \to \mathbb{K}$ continue.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$, soit $y_k$ une solution sur $I$ de $y' + a(x)y = b_k(x)$.
Alors la fonction $y = \sum_{k=1}^{n} y_k$ est une solution de $y' + a(x)y = b(x)$.

➪ **Exemple 6 :** Résoudre l'équation différentielle :

$$y' + 2y = 2 + 3e^x - 4\sin(2x).$$

## 1.5 Méthode de la variation de la constante

**Méthode 2 : Recherche d'une solution particulière : Méthode de variation de la constante**

Soit l'équation différentielle $(E)\quad y'+a(x)y=b(x)$ où $a$ et $b$ sont continues sur $I$.
Soit $A$ une primitive de $a$ sur $I$.

- Les solutions sur $I$ de l'équation homogène $E_0)$ $y'+a(x)y=0$ sont les fonctions $\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-A(x)} \end{array}$ , $\lambda \in \mathbb{K}$.
- On cherche une solution particulière de $(E)$ sur $I$ de la forme $y:\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \lambda(x)e^{-A(x)} \end{array}$ où $\lambda$ est une fonction dérivable.
  On a :

$$\begin{aligned} y'+a(x)y=b(x) &\iff \forall x\in I,\ \lambda'(x)e^{-A(x)}+\lambda(x)(-A'(x))e^{-A(x)}+a(x)\lambda(x)e^{-A(x)}=b(x) \\ &\iff \forall x\in I,\ \lambda'(x)=b(x)e^{A(x)} \end{aligned}$$

  La détermination d'une solution particulière de $(E)$ se ramène ainsi à la recherche d'une primitive de $x\mapsto b(x)e^{A(x)}$ sur $I$.

➪ **Exemple 7 :** Résoudre l'équation différentielle :

$$(1+x^2)y'-xy=x(1+x^2).$$

➪ **Exemple 8 :** Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^{+*}$ :

$$xy'+y=\cos(x).$$

# II Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

## 2.1 Définition

**Définition 2**

Soient $a,b,c\in\mathbb{K}$, $a\neq 0$ et $f:I\to\mathbb{K}$ une fonction continue.

- On dit que $y$ est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants $ay''+by'+cy=f(x)$ $(E)$ si et seulement si $y$ est deux fois dérivable et : $\forall x\in I,\ ay''(x)+by'(x)+cy(x)=f(x)$.
- On appelle équation homogène associée à $(E)$ l'équation : $ay''+by'+cy=0\quad (E_0)$.

## 2.2 Résolution de l'équation homogène

**Définition 3**

Soit $a,b,c\in\mathbb{K}$, $a\neq 0$ et soit $(E_0)$ l'équation différentielle $ay''+by'+cy=0$.
L'équation $ar^2+br+c=0$ est appelée **équation caractéristique** de $(E_0)$.

**Proposition 6**

Soit $a,b,c\in\mathbb{K}$, $a\neq 0$ et soit $(E_0)$ l'équation différentielle $ay''+by'+cy=0$.
Soit $r\in\mathbb{C}$. La fonction $x\mapsto e^{rx}$ est solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $r$ est solution de l'équation caractéristique $ar^2+br+c=0$.

**Lemme 1**

Soient $a,b\in\mathbb{K}$, $a\neq 0$. Soit $r$ une racine de l'équation caractéristique $ar^2+br+c=0$. Soit $y:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ deux fois dérivable. Posons $z:\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{-rx}y(x) \end{array}$. On a : $ay''+by'+cy=0$ ssi $az''+(2ar+b)z'=0$.

**Théorème 1**

Soit $a,b,c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et $(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$.
Si $b^2 - 4ac = 0$ alors l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ admet une racine double $r_0 \in \mathbb{K}$.
Les solutions de $(E_0)$ sont alors les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & (\lambda x + \mu) e^{r_0 x} \end{array} \qquad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

➪ **Exemple 9 :** Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

**Théorème 2**

Soit $a,b,c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ et $(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$.
Si $b^2 - 4ac \neq 0$ alors l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ admet deux racines $r_1$ et $r_2$ dans $\mathbb{C}$.
Les solutions de $(E_0)$ sont alors les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \end{array} \qquad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

➪ **Exemple 10 :** Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 2iy' - 2y = 0.$$

**Théorème 3**

Soit $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$.
Si $b^2 - 4ac > 0$ alors l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ admet deux racines $r_1$ et $r_2$ dans $\mathbb{R}$.
Les solutions de $(E_0)$ sont alors les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \end{array} \qquad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

➪ **Exemple 11 :** Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

**Théorème 4**

Soit $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$.
Si $b^2 - 4ac < 0$ alors l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ admet deux racines complexes conjuguées non réelles $\alpha \pm i\beta$, (avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$).
Les solutions de $(E_0)$ sont alors les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)\right) e^{\alpha x} \end{array} \qquad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

➪ **Exemple 12 :** Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

➪ **Exemple 13 :** Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}^{+*}$ :

$$x^2 y'' + y = 0.$$

On pourra poser $t = \ln x$.

➪ **Exemple 14 :** Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$ :

$$y'' + 4xy' + (3 + 4x^2) y = 0.$$

On pourra poser $z = e^{x^2} y$.

## 2.3 Résolution de l'équation avec second membre

**Proposition 7**

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue.
L'équation $ay'' + by' + cy = f(x)$ admet au moins une solution.

**Proposition 8**

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue.
Soit $(E) : ay'' + by' + cy = f(x)$.
Si $y_p$ est une solution particulière de $(E)$ et si $S_0$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à $(E)$, alors l'ensemble $S$ des solutions de $(E)$ est :

$$S = \{y_p + y_0 \ , \ y_0 \in S_0\}.$$

**Méthode 3 : Recherche d'une solution particulière**

- L'équation différentielle $ay'' + by' + cy = Ae^{\lambda x}$ $(E)$ où $a, b, c, A, \lambda \in \mathbb{K}$ admet une solution de la forme :
  - $x \mapsto Be^{\lambda x}$ si $\lambda$ n'est pas solution de l'équation caractéristique ;
  - $x \mapsto Bxe^{\lambda x}$ si $\lambda$ est racine simple de l'équation caractéristique ;
  - $x \mapsto Bx^2 e^{\lambda x}$ si $\lambda$ est racine double de l'équation caractéristique ;

  où $B \in \mathbb{K}$.
- L' équation différentielle $ay'' + by' + cy = A_1 \cos(\beta x) + A_2 \sin(\beta x)$ $(E)$ où $a, b, c, A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ avec $\beta \in \mathbb{R}^*$ admet une solution de la forme :
  - $x \mapsto B_1 \cos(\beta x) + B_2 \sin(\beta x)$ si $i\beta$ n'est pas solution de l'équation caractéristique ;
  - $x \mapsto B_1 x \cos(\beta x) + B_2 x \sin(\beta x)$ si $i\beta$ est racine simple de l'équation caractéristique.

  où $B_1, B_2 \in \mathbb{R}$.

➪ **Exemple 15 :** Résoudre l'équation différentielle :

$$-3y'' - 2y' + y = \cos(x).$$

## 2.4 Principe de superposition

**Proposition 9 : Principe de superposition**

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue. On suppose que $f = \sum_{k=1}^{n} f_k$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f_k : I \to \mathbb{K}$ continue.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$, soit $y_k$ une solution sur $I$ de $ay'' + by' + cy = f_k(x)$.
Alors la fonction $y = \sum_{k=1}^{n} y_k$ est une solution de $ay'' + by' + cy = f(x)$.

➪ **Exemple 16 :** Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-x} + e^{2x}.$$

## 2.5 Problème de Cauchy

**Proposition 10**

Soit $(E)$ l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = f(x)$ où $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, et $f$ continue sur $I$.
Soient $x_0 \in I$ et $y_0, y_0' \in \mathbb{K}$.
Il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{K}$ de $(E)$ telle que $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$.

**Remarque :** Comme l'équation différentielle est d'ordre 2, la condition initiale doit être double pour avoir l'unicité de la solution.