Exemples du chapitre 1 : Rudiments de logique, généralités et révisions sur les suites et les fonctions

---

➪ **Exemple 1 :**

1. Montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ 2ab \leq a^2 + b^2$.
2. Montrer que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ 2\sqrt{xy} \leq x + y$.

➪ **Exemple 2 :** Soit n un entier naturel pair. Montrer que n^2 est pair.

➪ **Exemple 3 :** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{Q},\ -2x + \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$.

➪ **Exemple 4 :**

1. Montrer que la proposition suivante est vraie :

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{Z},\ x \geq y.$$

2. Montrer que la proposition suivante, obtenue en échangeant les quantificateurs, est fausse :

$$\exists y \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{Z},\ x \geq y.$$

➪ **Exemple 5 :** Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que n^2 soit pair. Montrer que n est pair.

➪ **Exemple 6 :** Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Ce résultat est supposé connu et peut être utilisé.

➪ **Exemple 7 :** Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f^2 = f$. Montrer que $f = 0$ ou $f = 1$.

➪ **Exemple 8 :** Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$x \geq 0 \Longrightarrow x^2 + x \geq 0.$$

On utilisera trois méthodes de raisonnement.

➪ **Exemple 9 :** Soient $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et $c \leq d$.
Montrer que :

$$a + c = b + d \Rightarrow a = b \text{ et } c = d.$$

➪ **Exemple 10 :** Soient $a,b \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ ax + be^x = 0) \Leftrightarrow a = b = 0.$$

➪ **Exemple 11 :** On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}.$$

Etudier la monotonie de (u_n).

➪ **Exemple 12 :** Résoudre le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$(S)\begin{cases} x+y-z &= 1 \\ 2x+y+z &= 4 \\ x-3y+2z &= 0 \end{cases}$$

➪ **Exemple 13 :** Résoudre le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$(S)\begin{cases} x+y+3z &= 5 \\ x-y-z &= 1 \\ x+z &= 3 \end{cases}$$

➪ **Exemple 14 :** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, résoudre le système d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(S)\begin{cases} x+2y &= 1 \\ ax+3y &= b \end{cases}$$

➪ **Exemple 15 :** Soit $a \in \mathbb{R}$, résoudre le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$(S)\begin{cases} 2x+y-3z = a \\ 3x+2y+z = a+3 \\ 7x+4y-5z = 2a+5 \end{cases}$$

➪ **Exemple 16 :** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N},\ n^3 + 5n = 6k.$$

➪ **Exemple 17 :** On pose :

$$u_0 = 5,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - (n+1),$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - n - 2.$$

Déterminer le terme général de la suite (u_n).

➪ **Exemple 18 :** On pose : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n + 1$.
Déterminer le terme général de la suite (u_n).

➪ **Exemple 19 :** On pose : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2}{u_n}$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n$.

➪ **Exemple 20 :** On pose : $u_0 = 0$, $u_1 = 3$, $u_2 = -12$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} - u_n$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un entier relatif multiple de 3.

➪ **Exemple 21 :** On pose : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \begin{cases} u_{\frac{n}{2}}^2 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 3u_{\frac{n-1}{2}}^2 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^n$.

➪ **Exemple 22 :** On pose : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2^{n-1}$.

➪ **Exemple 23 :** On pose : $u_0 = -1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
Déterminer le terme général de la suite (u_n).

➪ **Exemple 24 :** On pose : $u_0 = 0$, $u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n$.
Déterminer le terme général de la suite (u_n).

➪ **Exemple 25 :** Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$x = \sqrt{6+x}.$$

➪ **Exemple 26 :** Montrer que :

$$\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ y = \frac{x+1}{x-1}$$

➪ **Exemple 27 :** Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que :

$$\exists!(g,h) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{I}(\mathbb{R}),\ f = g + h,$$

où $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions paires sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$ et $(g,h) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{I}(\mathbb{R})$ signifie que $g \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $h \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$.
