Exemples du chapitre 5 : Inégalités

➪ **Exemple 1 :** Soient $a, b, c, d, e, f, x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a \leq x \leq b$, $d \leq y \leq c < 0$ et $0 < e \leq z \leq f$. Encadrer :

- $x - y$
- xy
- $\dfrac{x-y}{z}$

➪ **Exemple 2 :** Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(x+1)^3(x-1) > (x+1)^4.$$

➪ **Exemple 3 :** Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante :

$$|1-x| \leq 2|x| - 3.$$

➪ **Exemple 4 :** Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante :

$$|(x-1)(x+2)| \leq 2.$$

➪ **Exemple 5 :** On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{(-1)^n + u_n}{2}.$$

Montrons que (u_n) est bornée.

➪ **Exemple 6 :** Montrer que :

$$\forall m, n \in \mathbb{Z},\ \left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor = n.$$

➪ **Exemple 7 :** Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor 3x - 2 \rfloor = \lfloor x + 1 \rfloor.$$

➪ **Exemple 8 :** Soit $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x - n\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \end{array}$. Montrer que f est périodique et que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq f(x) < n.$$
