# Exemples du chapitre 6 : Calcul algébrique

---

➪ **Exemple 1 :** Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n$.

- Soit $j \in \mathbb{N}^*$, calculer : $\sum_{k=1}^{j} a_k$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer : $\sum_{j=1}^{n} a_j$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer : $\sum_{j=1}^{2n} a_j$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer : $\sum_{j=n}^{2n} a_j$.

---

➪ **Exemple 2 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3$.

---

➪ **Exemple 3 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme :

$$S_n = 1 \times n + 2 \times (n-1) + \cdots + n \times 1.$$

---

➪ **Exemple 4 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^3.$$

---

➪ **Exemple 5 :** Soit $r \in \mathbb{R}$, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
Retrouver la formule donnant le terme général de $(u_n)$ en utilisant une somme télescopique.

---

➪ **Exemple 6 :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$6|(7^n - 1) \text{ et } 7|(3^{2n} - 2^n).$$

---

➪ **Exemple 7 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que :

$$\left\lfloor \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} x_i \right\rfloor \geq \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{x_i}{\alpha} \right\rfloor.$$

---

➪ **Exemple 8 :** Montons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k)}{k2^k} \right| \leq 1.$$

---

➪ **Exemple 9 :** Calculer : $\prod_{k=-1000}^{1000} k \ln(1 + |k|)$.

---

➪ **Exemple 10 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}.$$

---

➪ **Exemple 11 :** Soit $n \in \mathbb{N}$,

- Simplifier : $\prod_{k=1}^{n} (2k)$.
- Simplifier : $\prod_{k=1}^{n} (2k+1)$.

---

➪ **Exemple 12 :** Soit $n \in \mathbb{N}$, simplifier : $\prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}$.

---

➪ **Exemple 13 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer : $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j+1}$.

---

➪ **Exemple 14 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes :

$$S_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} (i+j) \text{ et } T_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j).$$

---

➪ **Exemple 15 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer : $\sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} \min(i,j)$.

---

➪ **Exemple 16 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{-k}$.

---

➪ **Exemple 17 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} \binom{i}{j}$.

---

➪ **Exemple 18 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$.

---

➪ **Exemple 19 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{k}$.

---