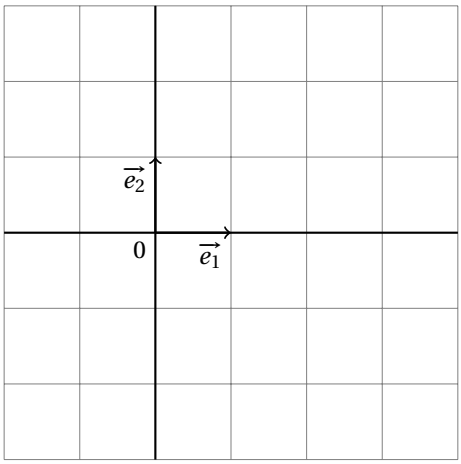
Exemples du chapitre 7 : Nombres complexes

➪ **Exemple 1 :** Posons $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2+3i$ et $z_3 = 4-i$, calculer : $(z_1+z_2)z_3$.

➪ **Exemple 2 :** Posons $z_1 = -1+3i$ et $z_2 = 4-i$. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $z_1^2 - 2z_2$.

➪ **Exemple 3 :** Posons $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2+3i$ et $z_3 = 4+i$.
Calculer $\overline{z_1^2 - 3z_2 + iz_3}$.

➪ **Exemple 4 :** On pose $z_1 = 2i$, $z_2 = 1+i$, $z_3 = -1-2i$ et $z_4 = 3$. Représenter les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ (resp. $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$, $\overrightarrow{u_4}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$, $\overrightarrow{v_4}$) d'affixes z_1 (resp. z_2, z_3, z_4, $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, $\overline{z_3}$, $\overline{z_4}$).



➪ **Exemple 5 :** Posons $z_1 = 1+i$ et $z_2 = 2+3i$, calculer la forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$.

➪ **Exemple 6 :** Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ tel que $|z| = 1$. Montrer que $Z = \dfrac{z+i}{iz+1} \in \mathbb{R}$.

➪ **Exemple 7 :** Posons $z_1 = \sqrt{3}+i$. Calculer le module de z_1^3.

➪ **Exemple 8 :** Montrer que :

$$\forall a,b,c \in \mathbb{C},\ |1+a|+|a+b|+|b+c|+|c| \geq 1.$$

➪ **Exemple 9 :** Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$:

$$\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leq \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}.$$

➪ **Exemple 10 :** Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{2ix} = i\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

➪ **Exemple 11 :** Soient $t, a, b \in \mathbb{R}$. Factoriser :

1. $z_1 = 1 + e^{it}$
2. $z_2 = 1 - e^{it}$
3. $z_3 = \cos(a) + \cos(b)$
4. $z_4 = \sin(a) - \sin(b)$

➪ **Exemple 12 :** Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \sin(kt).$$

➪ **Exemple 13 :** Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^3(x)\sin^2(x)$.

➪ **Exemple 14 :** Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$.

➪ **Exemple 15 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $x, y \in \mathbb{R}$. Calculer la somme suivante :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(x + ky).$$

➪ **Exemple 16 :** Déterminer la forme trigonométrique de :

1. $z_1 = 1 + i$
2. $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$

➪ **Exemple 17 :** Déterminer l'argument principal de :

1. $z_1 = (1+i)^{1000}$
2. $z_2 = (-1 - i\sqrt{3})^{500}$

➪ **Exemple 18 :** Calculer les racines carrées de $\sqrt{3} + i$ et de $-5 + 12i$.

➪ **Exemple 19 :** Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12) = 0.$$

➪ **Exemple 20 :** Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 + 2z + 1 - \sqrt{3} - i = 0.$$

➪ **Exemple 21 :** Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 + (1 - i)z^2 + (-1 - 4i)z - 3 + i = 0.$$

On commencera par montrer que i est racine de cette équation.

➪ **Exemple 22 :** On pose : $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_n$.
Déterminer le terme général de la suite (u_n).

➪ **Exemple 23 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le produit des racines n-ièmes de l'unité.

➪ **Exemple 24 :** Déterminer les racines 5-ièmes de $-2+2i$.

➪ **Exemple 25 :** Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^6 - 2iz^3 - 2 = 0.$$

➪ **Exemple 26 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^n + 1 = 0.$$

➪ **Exemple 27 :** Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1. $e^z = -1$
2. $e^z = 1+i$
3. $e^z = 2$

➪ **Exemple 28 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les dérivées n-ièmes de cos et sin.

➪ **Exemple 29 :** Déterminer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixes 1, z et z^2 forment un triangle rectangle.
