

I Division d'entiers

Exercice 1 : (★)

On divise deux entiers a et b , tels que $a > b$, par leur différence $a - b$. Comparer les quotients et les restes obtenus.

II pgcd

Exercice 2 :

Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que si on divise 4373 et 826 par n , on obtient respectivement 8 et 7 pour restes.

Exercice 3 :

Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que si on divise 6381 et 3954 par n , on obtient respectivement 9 et 6 pour restes.

Exercice 4 :

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer :

$$\text{pgcd}(mn, (2m+1)n).$$

Exercice 5 : (★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$a = n^2 + 3n \text{ et } b = n^2 + 5n + 6.$$

1. Déterminer $\text{pgcd}(n, n+2)$.
2. Déterminer $\text{pgcd}(a, b)$.

III ppcm

Exercice 6 : (★★)

Déterminer les entiers naturels non nuls a, b tels que $a \leq b$ et :

$$\text{ppcm}(a, b) = 21\text{pgcd}(a, b).$$

IV Nombres premiers

Exercice 7 : (★)

Soit $m \geq 2$. On suppose que m divise $(m-1)! + 1$.
Montrer que m est premier.

Exercice 8 : (★)

Soient $a, n \in \mathbb{N}^*$, soit p un nombre premier. Montrer que :

$$p|a^n \Rightarrow p^n|a^n.$$

Exercice 9 : (★)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Montrer qu'aucun des entiers successifs de $n! + 2$ à $n! + n$ n'est premier. Comment obtenir n entiers consécutifs non premiers?

Donner cinq entiers naturels consécutifs non premiers les plus petits possibles.

Exercice 10 : (★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un nombre premier p tel que :

$$n < p < n! + 2.$$

Exercice 11 : (★★)

Soient $a, b, c, k \in \mathbb{N}^*$ tels que $ab = c^k$ et $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ tels que $a = \alpha^k$ et $b = \beta^k$.

Exercice 12 : (★★)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a^n - 1 = (a-1)(1+a+\dots+a^{n-1})$.
2. Montrer que si $2^p - 1$ est premier, alors p est premier.
3. On appelle nombre parfait un entier n dont la somme des diviseurs vaut $2n$.
Montrer que si $2^p - 1$ est premier, alors $2^{p-1}(2^p - 1)$ est un nombre parfait.

Exercice 13 : (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers.

1. Calculer le nombre de diviseurs positifs de n .
2. Calculer la somme $S(n)$ des diviseurs positifs de n .
3. Montrer que si m et n sont premiers entre eux alors $S(mn) = S(m)S(n)$.