Exercices du chapitre 4 : Trigonométrie

I Cercle trigonométrique

Exercice 1 : (⋆)
En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, déterminer les valeurs exactes de :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

Exercice 2 : (⋆)
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -2 \leq \cos x + \sqrt{3}\sin x \leq 2.$$

Exercice 3 : (⋆⋆)
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, |\sin(nx)| < n|\sin x|.$$

où $\pi\mathbb{Z} = \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

II Équations et inéquations trigonométriques

Exercice 4 :
Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(2x) + \sin(x) = 0.$$

Exercice 5 : (⋆)
Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$2\cos^2(2x) - 3\cos(2x) = -1.$$

Exercice 6 : (⋆)
Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(3x) + \sin x = 0.$$

Exercice 7 : (⋆⋆)
Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x - \cos 2x = \sin 3x.$$

Exercice 8 :
Résoudre les inéquations suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $\cos x > 0$,
2. $\sin x \leq \frac{1}{2}$,

Exercice 9 : (⋆)
Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 > 0.$$

III Fonctions cosinus et sinus

Exercice 10 : Etudier et tracer la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \cos x.\sin 2x - 2\sin x \end{array}$$

Exercice 11 : (⋆) Etudier et tracer la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2\sin x + \sin(2x) \end{array}$$

Exercice 12 : (⋆⋆) Etudier la fonction :

$$f : x \mapsto \sin^2 x - \sqrt{2}\cos x.$$

Exercice 13 : (⋆⋆)
Soit la fonction :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & e^{-x}(\cos x + \sqrt{3}\sin x). \end{array}$$

1. Ecrire f sous la forme d'un produit d'une constante, d'une exponentielle et d'un cosinus.
2. Etudier les variations de f.

Exercice 14 : (⋆⋆)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\begin{array}{rccc} f_n: & \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x\cos^n(x). \end{array}$$

1. Montrer que la dérivée de la fonction f_n peut se mettre sous la forme :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f_n'(x) = \cos^{n-1}(x) g_n(x),$$

où g_n est une fonction dont on déterminera l'expression.
2. Etudier les variations de g_n.
3. Montrer que f_n admet un maximum.

IV Tangente

Exercice 15 : (⋆)
On considère la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \tan(2x) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Etudier la périodicité de f.
3. Etudier la parité de f.
4. Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et que :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f'(x) = \frac{2 + \cos^3(2x)}{\cos^2(2x)}.$$

5. Etudier et tracer f.

Exercice 16 : (⋆⋆)
On considère la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \sin(2x) - \frac{3}{4}\tan(x).$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Etudier la périodicité de f.
3. Etudier la parité de f.
4. Etudier et tracer f.

Exercice 17 : (⋆⋆)
Combien l'équation suivante admet-elle de solutions dans $[0, \pi]$?

$$\tan(x) + \tan(2x) + \tan(3x) = 0.$$

Exercice 18 : (⋆ ⋆ ⋆)
Etudier la fonction :

$$f : x \mapsto \tan^2(x)\sqrt{1 - \cos x}.$$

On étudiera la dérivabilité de f en 0.

V Fonctions cosinus et sinus hyperboliques

Exercice 19 : (⋆)
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch} x \geq 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 20 : (⋆)
Etudier $f : x \mapsto \operatorname{ch}(3x) - 3\operatorname{ch}(x)$.

Exercice 21 : (⋆⋆)

1. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sh}(x) = 2.$$

2. Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sh}(x) \leq 2.$$

3. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{ch}(x) = 2.$$

4. Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{ch}(x) \leq 2.$$

Exercice 22 : 
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b), \operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b),$$
$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b), \operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b),$$
$$\operatorname{ch}(2a) = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a, \operatorname{sh}(2a) = 2\operatorname{ch} a \operatorname{sh} a.$$

Exercice 23 : (⋆⋆)

1. (a) Montrer que la fonction f suivante est bijective :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^+ & \to & [1, +\infty[\\ & x & \mapsto & \operatorname{ch} x. \end{array}$$

On note argch sa bijection réciproque.
(b) Montrer que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

2. (a) Montrer que la fonction sh est bijective.
On note argsh sa bijection réciproque.
(b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

VI Fonctions circulaires réciproques

Exercice 24 : (⋆)
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arccos} \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\operatorname{Arctan}|x|.$$

Exercice 25 : (⋆⋆)
Déterminer son ensemble de validité et montrer la formule :

$$2\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 26 : (⋆⋆)

Déterminer son ensemble de validité et montrer la formule :

$$2\operatorname{Arctan}(\sqrt{1+x^2}-x) + \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 27 : (⋆⋆)
Montrer que :

$$\forall x \in]-1,1], \operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x^2} - \operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\operatorname{Arcsin} x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}\operatorname{Arccos} x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Exercice 28 : (⋆)
Etudier les variations des fonctions suivantes et tracer leur courbe représentative :

1. $f_1(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$,
2. $f_2(x) = (x-1)^2\operatorname{Arctan} x$,

Exercice 29 : (⋆)
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \operatorname{Arctan} x > \frac{x}{1+x^2}.$$

Exercice 30 : (⋆⋆)
On pose :

$$f : x \mapsto \operatorname{Arctan}\frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Etudier la périodicité et la parité de f.
3. Soit $x \in]0,\pi[$, exprimer $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ en fonction de $\frac{x}{2}$.
4. En déduire une expression simple de $f(x)$ pour $x \in]0,\pi[$.
5. Tracer f sur $]-3\pi, 3\pi[$.
6. Calculer $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Exercice 31 : (⋆)
Simplifier les expressions suivantes :

1. $\cos(4\operatorname{Arctan} x)$,
2. $\sin(3\operatorname{Arctan} x)$.

Exercice 32 : (⋆⋆)
Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $xy \neq 1$, montrer que :

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan}\frac{x+y}{1-xy} + k\pi,$$

où :

- $k = 0$ si $xy < 1$,
- $k = 1$ si $xy > 1$ et $x > 0$,
- $k = -1$ si $xy > 1$ et $x < 0$.

Exercice 33 : (⋆⋆)
Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $\operatorname{Arccos} x = \operatorname{Arcsin} 2x$,
2. $2\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})$.

Exercice 34 : (⋆⋆)
Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} 2x = \frac{\pi}{4}$,
2. $\operatorname{Arcsin} 2x = \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}(\sqrt{2}x)$.

Exercice 35 : (⋆⋆)
Montrer la formule de Machin :

$$4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$