Exercices du chapitre 5 : Inégalités

I Inégalités dans $\mathbb{R}$

Exercice 1 : (⋆)
Soient a et b deux réels non nuls, distincts et de même signe. Montrer que :

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2.$$

Exercice 2 : 📖
Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante :

$$\sqrt{x-4}-\sqrt{2x-3}<0.$$

II Valeur absolue

Exercice 3 : (⋆)
Résoudre, dans $\mathbb{R}$,

$$|x^2+2x|\geq 3.$$

Exercice 4 : (⋆)
Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations ou inéquations suivantes :

1. $|2x-4|=|x-1|$
2. $\left|\dfrac{x-1}{x+3}\right|\leq 2$

Exercice 5 : (⋆)
Résoudre l'équation d'inconnue $x\in\mathbb{R}$:

$$|x+3|-|x-1|=|2x+1|.$$

Exercice 6 : (⋆⋆)
Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x\in\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x+4-4\sqrt{x}}+\sqrt{x+9-6\sqrt{x}}=1.$$

Exercice 7 : (⋆⋆)
Soient $x,m\in\mathbb{R}$. Montrer que :

$$x\geq m\Rightarrow\sqrt{1+x^2}\leq 1+2|m|+x.$$

Exercice 8 : (⋆⋆)

1. Montrer que si x et y sont deux réels positifs tels que $x\geq y$, alors :
$$\sqrt{x+y}\leq\sqrt{x}+\sqrt{y} \text{ et } \sqrt{x}-\sqrt{y}\leq\sqrt{x-y}\leq\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$
2. En déduire que, pour tout $x,y\in\mathbb{R}$:
$$\sqrt{|x+y|}\leq\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}$$
$$\text{et } \left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right|\leq\sqrt{|x-y|}\leq\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}.$$

Exercice 9 : (⋆⋆)
Montrer que pour tout $x,y\in\mathbb{R}$:

$$|x|+|y|\leq|x+y|+|x-y|,$$
$$1+|xy-1|\leq(1+|x-1|)(1+|y-1|).$$

III Majorations, minorations

Exercice 10 : 📖
Montrer que la fonction $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x$ n'est pas majorée.

IV Partie entière

Exercice 11 : 📖 Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left\lfloor\sqrt{n^2+3n+4}\right\rfloor=n+1.$$

Exercice 12 : 📖 Résoudre l'équation d'inconnue $x\in\mathbb{R}$:

$$\left\lfloor\sqrt{x^2+1}\right\rfloor=2.$$

Exercice 13 : (⋆) Résoudre l'équation d'inconnue $x\in\mathbb{R}^+$:

$$\lfloor\sqrt{x}\rfloor=\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor.$$

Exercice 14 : (⋆)
Montrer que :

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\ \lfloor x\rfloor+\lfloor x+y\rfloor+\lfloor y\rfloor\leq\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 2y\rfloor.$$