Exercices du chapitre 8 : Primitives

I Calcul de primitives

Exercice 1 :
Déterminer une primitive de :

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{2x-3}{(x^2-3x+10)^4}$,
2. $f_2 : x \mapsto xe^{x^2}$,
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2}$,
4. $f_4 : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$,
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$,
6. $f_6 : x \mapsto \dfrac{(\ln(3x+6))^3}{x+2}$,
7. $f_7 : x \mapsto \dfrac{2x-5}{(x^2-5x+9)^4}$.

Exercice 2 :
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}.$$

En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 3 :
Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de :

$$f : x \mapsto \sin^3 x.$$

Exercice 4 : (⋆⋆)
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\},\ \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\tan\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

En déduire une primitive de :

$$x \mapsto \frac{1}{\sin x} \text{ et } x \mapsto \frac{1}{\cos x}.$$

Exercice 5 :
Déterminer une primitive de :

$$x \mapsto e^{2x}\cos(3x).$$

Exercice 6 : Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(3x)\,dx$,
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\cos x \sin^2 x\,dx$,
3. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$,
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^3}\,dx$,
5. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$,
6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx$.

Exercice 7 : (⋆)

1. Calculer : $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}\,dx$,
2. Calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\operatorname{Arcsin} x}{1-x^2}}\,dx$.

Exercice 8 :

a. Déterminer une primitive sur $]-2,+\infty[$ de :

$$x \mapsto \frac{\ln^3(2x+4)}{x+2}.$$

b. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de :

$$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{3x^2+2}}.$$

Exercice 9 : (⋆)

1. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\},\ \frac{2x^2-3x-4}{x-2} = ax+b+\frac{c}{x-2}.$$

2. En déduire la valeur de :
$$\int_0^1 \frac{2x^2-3x-4}{x-2}\,dx.$$

Exercice 10 : (⋆⋆)
Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[,\mathbb{R})$ telle que $f(0)=0$ et : $\forall x \in [0,+\infty[,\ 0 \leq f'(x) \leq 1$. Montrer que :
$$\forall x \in [0,+\infty[,\ \left(\int_0^x f\right)^2 \geq \int_0^x f^3.$$

II Intégration par parties et changement de variable

Exercice 11 : 
Déterminer les primitives des fonctions suivantes :
1. $x \mapsto \text{Arcsin}\, x$ sur $]-1,1[$
2. $x \mapsto \dfrac{x}{\cos^2 x}$.

Exercice 12 : (⋆)
Calculer les intégrales suivantes :
1. $\displaystyle\int_0^1 t\text{Arctan}\,(t)\,dt$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\sin^4(t)\,dt$

Exercice 13 : (⋆)
Déterminer les primitives des fonctions suivantes :
1. $x \mapsto \text{Arctan}\, x$,
2. $x \mapsto \sin(\ln x)$.

Exercice 14 : 
Déterminer une primitive de :
$$x \mapsto (x^3+4x^2-2x+7)e^{2x}.$$

Exercice 15 : (⋆)
Déterminer une primitive de :
$$x \mapsto x^3\cos x \text{ et } x \mapsto x^3 \sin x.$$

Exercice 16 : (⋆)
Calculer les primitives des fonctions suivantes :
1. $x \mapsto x^2 \sin^3 x$
2. $x \mapsto (x^2-x+3)\sin x$
3. $x \mapsto (x^2+1)e^x \cos x$
4. $x \mapsto (x\text{sh}\, x)^2$

Exercice 17 : (⋆)
On considère la suite (I_n) définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x\,dx.$$
Etablir une formule de récurrence.

Exercice 18 : (⋆⋆)
On considère la suite (I_n) définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x\,dx.$$
En utilisant la formule de récurrence établie dans l'exercice précédent, écrire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, I_{2p} et I_{2p+1} sous forme de sommes.

Exercice 19 : 
Calculer :
$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^{10}+1}\,dx.$$

Exercice 20 : 
Déterminer une primitive de :
$$x \mapsto \frac{e^{2x}}{1+e^x}.$$

Exercice 21 : (⋆)
Calculer les primitives de :
1. $x \mapsto \dfrac{x^7}{(x^4+1)^2}$,
2. $x \mapsto \dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$,
3. $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$,
4. $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$.

Exercice 22 : (⋆) Calculer une primitive de :
1. $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, en effectuant le changement de variable $t=\sqrt{x^2-1}$,
2. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$, en effectuant le changement de variable $t=\sqrt{e^x-1}$.

Exercice 23 :
Soit $a > 0$. Calculer une primitive de :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ et } x \mapsto \frac{1}{a^2 + x^2}.$$

Exercice 24 : (⋆)
Soit f définie par :

$$f(x) = \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{1 - t^2}{(1 + t^2)\sqrt{1 + t^4}}\, dt.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = f(\frac{1}{x})$.
3. En déduire que f est identiquement nulle.

Exercice 25 : (⋆⋆) On pose :

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_0^x \frac{1}{1+\cos^2 t}\, dt. \end{array}$$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, calculer $F(x)$ en effectuant le changement de variable $t = \text{Arctan}(u)$.
3. En déduire la valeur de $F(\frac{\pi}{2})$.

Exercice 26 : (⋆⋆)
Déterminer une primitive sur $]-1, 1[$ de :

$$x \mapsto (\text{Arcsin}\, x)^2.$$

III Fractions rationnelles

Exercice 27 :
Déterminer une primitive de :

$$x \mapsto \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

Exercice 28 :
Déterminer une primitive de :

$$x \mapsto \frac{1}{9x^2 + 6x + 5}$$

Exercice 29 : (⋆)
Déterminer une primitive de :

1. $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$,
2. $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$,
3. $f_3 : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

Exercice 30 : (⋆⋆)
Calculer les primitives de :

$$x \mapsto \frac{x}{x^4 - x^2 - 2}.$$

Exercice 31 : (⋆)
Calculer les primitives des fonctions rationnelles suivantes :

a. $x \mapsto \frac{x^3 + 2x}{x^2 + x + 1}$
b. $x \mapsto \frac{2x - 1}{(x + 1)^2}$
c. $x \mapsto \frac{2x}{x^2 - x + 1}$

Exercice 32 : (⋆)
Déterminer une primitive de :

$$x \mapsto \frac{x}{x^2 - x + 1}.$$

Exercice 33 : (⋆⋆)
Montrer que :

$$\exists a, b, c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \frac{1}{x^3 + 1} = \frac{a}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 - x + 1}.$$

En déduire les primitives de :

$$x \mapsto \frac{1}{x^3 + 1}.$$