# Indications du chapitre 4 : Trigonométrie



## I Cercle trigonométrique

**Exercice 1 : (⋆)**
Utiliser les formules $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$.
*Solution :* $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

**Exercice 2 : (⋆)**
Remarquer que $\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

**Exercice 3 : (⋆⋆)**
Raisonner par récurrence.

## II Équations et inéquations trigonométriques

**Exercice 4 :**
Se ramener à un produit nul.
*Solution :* $\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

**Exercice 5 : (⋆)**
Poser $X=\cos(2x)$ et se ramener à un polynôme du second degré.
*Solution :* $\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pm\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

**Exercice 6 : (⋆)**
Transformer le sinus en cosinus.
*Solution :* $\{\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\}$

**Exercice 7 : (⋆⋆)**
Se ramener à un produit nul.
*Solution :* $\{\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\frac{2k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\}$

**Exercice 8 :**
1. *Solution :* $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$
2. *Solution :* $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi\right]$

**Exercice 9 : (⋆)**
Se ramener à une équation du second degré.
*Solution :* $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi\right[$

## III Fonctions cosinus et sinus

**Exercice 10 :**
*Solution :* $f'(x)=-6\cos(x)\sin^2(x)$, *$f$ est croissante sur* $[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$ *et sur* $[\frac{\pi}{2},\pi]$ *et décroissante sur* $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

**Exercice 11 : (⋆)** Pour étudier le signe de la dérivée, se ramener au signe d'un polynôme du second degré.
*Solution :* $f'(x)=4\cos^2(x)+2\cos(x)-2$, *$f$ est $2\pi$-périodique, impaire, croissante sur* $[0,\frac{\pi}{3}]$ *et décroissante sur* $[\frac{\pi}{3},\pi]$.

**Exercice 12 : (⋆⋆)** *Solution :* $f'(x)=2\sin x\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, *$f$ est croissante sur* $[0,\frac{3\pi}{4}]$ *et décroissante sur* $[\frac{3\pi}{4},\pi]$.

**Exercice 13 : (⋆⋆)**
1. *Solution :* $2e^{-x}\cos(x-\frac{\pi}{3})$
2. Calculer $f'(x)$ et l'écrire sous forme d'un produit.
   *Solution :* $f'(x)=-2\sqrt{2}e^{-x}\cos\left(x-\frac{7\pi}{12}\right)$, *$f$ est strictement décroissante sur* $\left[\frac{\pi}{12}+2k\pi,\frac{13\pi}{12}+2k\pi\right]$ *pour tout* $k\in\mathbb{Z}$ *et $f$ est strictement croissante sur* $\left[\frac{13\pi}{12}+2k\pi,\frac{25\pi}{12}+2k\pi\right]$ *pour tout* $k\in\mathbb{Z}$.

**Exercice 14 : (⋆⋆)**
1. *Solution :* $g_n(x)=\cos(x)-nx\sin(x)$.
2. *Solution : $g_n$ est décroissante.*
3. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer que $g_n$ s'annule.

## IV Tangente

**Exercice 15 : (⋆)**
1. *Solution :* $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\}$
2. *Solution : $f$ est $\pi$-périodique.*

3. Utiliser $f(0)$ pour montrer que $f$ n'est pas impaire. Raisonner par l'absurde pour montrer que $f$ n'est pas paire en utilisant, par exemple, les valeurs en $\pm\frac{\pi}{6}$.
   *Solution : $f$ n'est ni paire ni impaire.*
4. Utiliser les formules de trigonométrie.
5. *Solution : $f$ est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$ et sur $]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}[$.*

**Exercice 16 : (⋆⋆)**

1. *Solution : $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$*
2. *Solution : $f$ est $\pi$-périodique.*
3. *Solution : $f$ est impaire.*
4. Pour étudier le signe de la dérivée, se ramener au signe d'un polynôme du second degré en $\cos^2 x$.
   *Solution : $f'(x)=\dfrac{4\cos^4 x-2\cos^2 x-\frac{3}{4}}{\cos^2 x}$, $f$ est strictement croissante sur $[0,\frac{\pi}{6}[$ et strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}[$.*

**Exercice 17 : (⋆⋆)**
Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $f:x\mapsto\tan(x)+\tan(2x)+\tan(3x)$ sur de intervalles bien choisis.
*Solution : L'équation a 6 solutions.*

**Exercice 18 : (⋆⋆⋆)** *Solution : $f'(x)=\frac{\tan(x)(4+\cos x+\cos^2 x)\sqrt{1-\cos x}}{2\cos^2 x}$, $f$ est croissante sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ et décroissante sur $]\frac{\pi}{2},\pi]$.*

# V Fonctions cosinus et sinus hyperboliques

**Exercice 19 : (⋆)**
Dériver deux fois $x\mapsto\operatorname{ch}x-1-\frac{x^2}{2}$.

**Exercice 20 : (⋆)**
Pour étudier le signe de $f'$, utiliser la croissance de sh.
*Solution : $f$ est décroissante sur $]-\infty,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$.*

**Exercice 21 : (⋆⋆)**

1. Utiliser la forme exponentielle et se ramener à une équation d'ordre 2 en $e^x$.
   *Solution : $\ln(2+\sqrt{5})$.*
2. Utiliser la question précédente et la monotonie de sh.
   *Solution : $]-\infty,\ln(2+\sqrt{5})]$.*
3. Utiliser la forme exponentielle et se ramener à une équation d'ordre 2 en $e^x$.
   *Solution : $\ln(2+\sqrt{3}),\ln(2-\sqrt{3})$.*
4. Utiliser la question précédente et la monotonie de ch.
   *Solution : $[\ln(2-\sqrt{3}),\ln(2+\sqrt{3})]$.*

**Exercice 22 :**
Utiliser la définition avec les exponentielle.

**Exercice 23 : (⋆⋆)**

1. (a) Montrer que $f$ est continue, strictement monotone donc bijective de …vers ….
   (b) Soit $x\in\mathbb{R}^+$, $f\left(\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right)=\frac{\exp\left(\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right)+\exp\left(-\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right)}{2}$.
   Ainsi $f(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})+\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}}{2}=\cdots=x$.
   Conclure.
2. (a) Montrer que sh est continue, strictement monotone donc bijective de …vers ….
   (b) De même, calculer $\operatorname{sh}(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))$.

# VI Fonctions circulaires réciproques

**Exercice 24 : (⋆)**
Etudier $f:x\mapsto\operatorname{Arccos}\frac{1-x^2}{1+x^2}-2\operatorname{Arctan}|x|$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

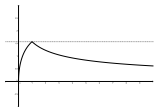
**Exercice 25 : (⋆⋆)**
Calculer la dérivée de la fonction apparaissant dans le membre de gauche.
*Solution :$]-1,1]$*

**Exercice 26 : (⋆⋆)**
Calculer la dérivée de la fonction apparaissant dans le membre de gauche.
*Solution :$\mathbb{R}$*

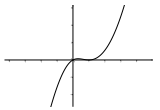
**Exercice 27 : (⋆⋆)**
Dériver $x\mapsto\operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x^2}-\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ et utiliser la continuité et la valeur en 0 pour déterminer les constantes.

**Exercice 28 : (⋆)**

1. *Solution :*



2. *Solution :*



**Exercice 29 : (⋆)**
Faire une étude de fonctions.

**Exercice 30 : (⋆⋆)**

1. *Solution :* $\mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
2. *Solution :* $f$ est $2\pi$-périodique et impaire.
3. *Solution :* $\frac{1-\cos x}{\sin x} = \tan \frac{x}{2}$
4. *Solution :* $f(x) = \frac{x}{2}$
5. Utiliser la parité puis la périodicité.
6. *Solution :* $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

**Exercice 31 : (⋆)**
Utiliser les formules de trigonométrie.

1. *Solution :* $\dfrac{1-6x^2+x^4}{(1+x^2)^2}$
2. *Solution :* $\dfrac{x(3-x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}$

**Exercice 32 : (⋆⋆)**

- En utilisant la formule donnant $\tan(a+b)$, montrer que : $\tan(\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y) = \dfrac{x+y}{1-xy}$.
- En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} \dfrac{x+y}{1-xy} + k\pi$.
- Comme $\operatorname{Arctan} x, \operatorname{Arctan} y, \operatorname{Arctan} \dfrac{x+y}{1-xy} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, montrer que $k \in \{-1,0,1\}$.
- Si $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y \in \left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[$, remarquer que $k = -1$ et que $\operatorname{Arctan} \dfrac{x+y}{1-xy} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
  On a donc $\operatorname{Arctan} x < \operatorname{Arctan}(-y)$ donc $x < -y$, ainsi $x+y<0$. De plus $\dfrac{x+y}{1-xy} > 0$. En déduire le signe de $1-xy$.
- Si $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$, raisonner de même.
- Si $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, raisonner de même.
- Si $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, raisonner de même.

**Exercice 33 : (⋆⋆)**

1. Appliquer la fonction cosinus.
   *Solution :* $\{\frac{\sqrt{5}}{5}\}$
2. Appliquer la fonction sinus.
   *Solution :* $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

**Exercice 34 : (⋆⋆)**

1. Appliquer la fonction tangente.
   *Solution :* $\{\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\}$
2. Appliquer la fonction sinus.
   *Solution :* $\{0, \frac{\sqrt{14}}{8}, -\frac{\sqrt{14}}{8}\}$

**Exercice 35 : (⋆⋆)**
Montrer que $\tan\left(4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239}\right) = 1$ puis effectuer des encadrements.