Preuves supplémentaires du chapitre 1
Rudiments de logique, généralités et révisions sur les suites et les fonctions

---

Théorème 1 : Principe de récurrence

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$.
Si :

- $P(n_0)$ est vraie,
- $\forall n \geq n_0$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$;

alors pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Preuve. Supposons que :

- $P(n_0)$ est vraie,
- $\forall n \geq n_0$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.

Supposons également qu'il existe $n_1 \geq n_0$ tel que $P(n_1)$ soit fausse.
Soit A l'ensemble des entiers $n \geq n_0$ tel que $P(n)$ soit fausse.
Comme $n_1 \in A$, alors A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, ainsi A admet un minimum que l'on note N.
Comme $P(n_0)$ est vraie, alors $n_0 \notin A$ donc $N \neq n_0$, ainsi $N > n_0$.
De plus, $N-1 \geq n_0$ et, par minimalité de N, $N-1 \notin A$.
Donc $P(N-1)$ est vraie.
Ainsi, par hypothèse, $P((N-1)+1)$ est vraie, c'est-à-dire $P(N)$ est vraie.
Or $N \in A$, on obtient donc une contradiction.
Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie. □

Proposition 18

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$. On considère la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n. \quad (*)$$

L'équation $r^2 - ar - b = 0$ est appelée équation caractéristique.

- Si l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1, $r_2 \in \mathbb{R}$, les suites vérifiant $(*)$ sont de la forme :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$
- Si l'équation caractéristique admet une solution double $r \in \mathbb{R}$, les suites vérifiant $(*)$ sont de la forme :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n) r^n,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Preuve.

- Supposons que l'équation caractéristique admette deux solutions distinctes r_1, $r_2 \in \mathbb{R}$.
  - Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ et montrons que :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n.$$
  Soit $n \in \mathbb{N}$,
  $$\begin{aligned} a u_{n+1} + b u_n &= a(\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}) + b(\lambda r_1^n + \mu r_2^n) \\ &= \lambda r_1^n (a r_1 + b) + \mu r_2^n (a r_2 + b) \\ &= \lambda r_1^n . r_1^2 + \mu r_2^n . r_2^2 \text{ car } r_1^2 - a r_1 - b = 0 \text{ et } r_2^2 - a r_2 - b = 0, \\ &= \lambda r_1^{n+2} + \mu r_2^{n+2} \\ &= u_{n+2}. \end{aligned}$$
  Ainsi :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n.$$

– Réciproquement, montrons que si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, alors, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

∗ Montrons qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $u_0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2$.
On a :

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{lcl} u_0 &=& \lambda + \mu \\ u_1 &=& \lambda r_1 + \mu r_2 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda + \mu &=& u_0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 &=& u_1 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} \lambda + \mu &=& u_0 & \\ \mu(r_2 - r_1) &=& u_1 - r_1 u_0 & L_2 \leftarrow L_2 - r_1 L_1 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} \lambda + \mu &=& u_0 & \\ \mu &=& \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} & \text{car } r_1 \neq r_2 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda &=& u_0 - \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} = \frac{u_0 r_2 - u_1}{r_2 - r_1} \\ \mu &=& \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Posons :

$$\lambda = \frac{u_0 r_2 - u_1}{r_2 - r_1} \text{ et } \mu = \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1}.$$

On a alors : $u_0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2$.

∗ Montrons, par récurrence double que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

· Pour $n = 0$, par construction de λ et μ, on a :

$$u_0 = \lambda + \mu = \lambda r_1^0 + \mu r_2^0.$$

· Pour $n = 1$, par construction de λ et μ, on a :

$$u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2 = \lambda r_1^1 + \mu r_2^1.$$

· Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ et $u_{n+1} = \lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n \\
&= a(\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}) + b(\lambda r_1^n + \mu r_2^n) \\
&= \lambda r_1^n (ar_1 + b) + \mu r_2^n (ar_2 + b) \\
&= \lambda r_1^n . r_1^2 + \mu r_2^n . r_2^2 \text{ car } r_1^2 - ar_1 - b = 0 \text{ et } r_2^2 - ar_2 - b = 0, \\
&= \lambda r_1^{n+2} + \mu r_2^{n+2}.
\end{aligned}$$

· Ainsi, par récurrence double :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

– On a donc montré que les suites vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, sont les suites de la forme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

• Supposons que l'équation caractéristique admette une solution double $r \in \mathbb{R}$.

– Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda + \mu n) r^n$ et montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
au_{n+1} + bu_n &= a(\lambda + \mu(n+1)) r^{n+1} + b(\lambda + \mu n) r^n \\
&= \lambda r^n (ar + b) + \mu r^n ((n+1)ar + nb) \\
&= \lambda r^n (ar + b) + \mu n r^n (ar + b) + \mu r^n . ar \\
&= \lambda r^n . r^2 + \mu n r^n . r^2 + \mu r^n . ar \text{ car } r^2 - ar - b = 0, \\
&= \lambda r^{n+2} + \mu n r^{n+2} + \mu r^n . ar.
\end{aligned}$$

Or, comme r est racine double : $r = -\frac{-a}{2} = \frac{a}{2}$, ainsi $ar = 2r.r = 2r^2$ donc :

$$au_{n+1} + bu_n = \lambda r^{n+2} + \mu n r^{n+2} + 2r^{n+2} = (\lambda + \mu(n+2)) r^{n+2}.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

– Réciproquement, montrons que si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, alors, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n) r^n.$$

∗ Montrons qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $u_0 = \lambda$ et $u_1 = (\lambda+\mu)r$.
On a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & \lambda \\ u_1 & = & (\lambda+\mu)r \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & u_0 \\ (\lambda+\mu)r & = & u_1 \end{array}\right.$$

Si $r = 0$, comme r est racine de $r^2 - ar - b = 0$, alors $b = 0$ ce qui est absurde, donc $r \neq 0$. Ainsi :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & \lambda \\ u_1 & = & (\lambda+\mu)r \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & u_0 \\ \mu & = & \frac{u_1}{r} - u_0 \end{array}\right.$$

Posons :

$$\lambda = u_0 \text{ et } \mu = \frac{u_1}{r} - u_0.$$

On a alors : $u_0 = \lambda$ et $u_1 = (\lambda+\mu)r$.

∗ Montrons, par récurrence double que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n)r^n.$$

· Pour $n = 0$, par construction de λ et μ, on a :

$$u_0 = \lambda = (\lambda + \mu.0)r^{\cdot}$$

· Pour $n = 1$, par construction de λ et μ, on a :

$$u_1 = (\lambda+\mu)r = (\lambda + \mu.1)r^1.$$

· Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $u_n = (\lambda + \mu n)r^n$ et $u_{n+1} = (\lambda + \mu(n+1))r^{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n \\ &= a(\lambda + \mu(n+1))r^{n+1} + b(\lambda + \mu n)r^n \\ &= \lambda r^n(ar + b) + \mu r^n((n+1)ar + nb) \\ &= \lambda r^n(ar + b) + \mu n r^n(ar + b) + \mu r^n.ar \\ &= \lambda r^n.r^2 + \mu n r^n.r^2 + \mu r^n.ar \text{ car } r_1^2 - ar_1 - b = 0 \text{ et } r_2^2 - ar_2 - b = 0, \\ &= \lambda r^{n+2} + \mu n r^{n+2} + \mu r^n.ar \\ &= \lambda r^{n+2} + \mu n r^{n+2} + \mu r^n.2r^2 \text{ car } r = \frac{a}{2}, \\ &= \lambda(\lambda + \mu(n+2))r^{n+2} \end{aligned}$$

· Ainsi, par récurrence double :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n)r^n.$$

– On a donc montré que les suites vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, sont les suites de la forme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n)r^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

□