Preuves supplémentaires du chapitre 9
Equations différentielles

Proposition 10

Soit (E) l'équation différentielle $ay''+by'+cy=f(x)$ où $a,b,c\in\mathbb{K}$, $a\neq 0$, et f continue sur I.
Soient $x_0\in I$ et $y_0,y_0'\in\mathbb{K}$.
Il existe une unique solution $y:I\to\mathbb{K}$ de (E) telle que $\begin{cases} y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_0' \end{cases}$.

Preuve. Soit r une racine de l'équation caractéristique $ar^2+br+c=0$. Soit $y:I\to\mathbb{K}$ deux fois dérivable. Posons $z:\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{-rx}y(x) \end{array}$.
En reprenant les résultats de la preuve de la proposition 7, ona :

$$ay''+by'+cy=f(x) \iff Z'+\frac{2ar+b}{a}Z=\frac{f(x)e^{-rx}}{a},$$

avec $Z=z'$.
De plus :

$$\begin{aligned}\begin{cases} y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_0' \end{cases} &\iff \begin{cases} z(x_0)=y_0e^{-rx_0} \\ z'(x_0)e^{rx_0}+rz(x_0)e^{rx_0}=y_0' \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z(x_0)=y_0e^{-rx_0} \\ z'(x_0)=y_0'e^{-rx_0}-rz(x_0) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z(x_0)=y_0e^{-rx_0} \\ Z(x_0)=y_0'e^{-rx_0}-ry_0e^{-rx_0} \end{cases}\end{aligned}$$

Soit Z_0 l'unique solution de $Z'+\frac{2ar+b}{a}Z=\frac{f(x)e^{-rx}}{a}$ telle que : $Z(x_0)=y_0'e^{-rx_0}-ry_0e^{-rx_0}$. On a donc :

$$\begin{cases} ay''+by'+cy=f(x) \\ y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_0' \end{cases} \iff \begin{cases} z(x_0)=y_0e^{-rx_0} \\ Z=Z_0 \end{cases}$$

Soit z_0 l'unique primitive de Z_0 telle que $z(x_0)=y_0e^{-rx_0}$, on a donc :

$$\begin{aligned}\begin{cases} ay''+by'+cy=f(x) \\ y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_0' \end{cases} &\iff z=z_0 \\ &\iff \forall x\in I,\ y(x)=z_0(x)e^{rx}.\end{aligned}$$

D'où l'unicité de y. □